Resumen Teórico

$$\text{SEN}^2 x + \text{COS}^2 x = 1$$

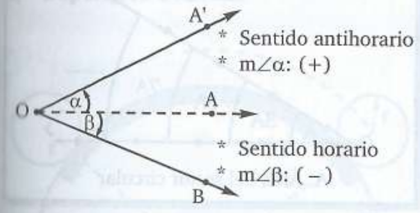
Trigonometría

FONDO EDITORIAL RODO

ÍNDICE

RESUMEN TEÓRICO DE TRIGONOMETRÍA

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO



* Sentido antihorario
* m∠α: (+)

* Sentido horario
* m∠β: (–)

$\overrightarrow{OA}$: Posición inicial [lado inicial]
$\overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{OB}$: Posición final [lado final]
O : Vértice del ángulo generado
$\alpha \wedge \beta$: Ángulos trigonométricos

SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

SISTEMA DE MEDIDA SEXAGESIMAL

$$\boxed{\angle 1v <> 360^\circ}$$

Subunidades: 1' : minuto sexagesimal
1" : segundo sexagesimal

Donde:

$$\boxed{1^\circ <> 60' \wedge 1' <> 60'' \Rightarrow 1^\circ <> 3600''}$$

SISTEMA DE MEDIDA CENTESIMAL

$$\boxed{\angle 1v <> 400^g}$$

Subunidades 1^m : minuto centesimal
1^s : segundo centesimal

Donde:

$$\boxed{1^g <> 100^m \wedge 1^m <> 100^s \Rightarrow 1^g <> 10000^s}$$

SISTEMA DE MEDIDA RADIAL

$$\boxed{\angle 1v <> 2\pi rad}$$

Valores aproximados de π:

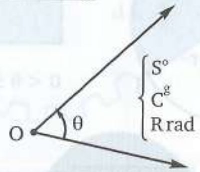
$$\pi = 3,1416; \ \pi = \frac{22}{7}; \ \pi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\boxed{1rad <> 57^\circ 17' 44''}$$

Se cumple:

$$\boxed{1rad > 1^\circ > 1^g} \ \boxed{27' <> 50^m} \ \boxed{81'' <> 250^s}$$

RELACIÓN NUMÉRICA ENTRE LOS TRES SISTEMAS



Siendo:
S: Número de grados sexagesimales del ángulo θ.
C: Número de grados centesimales del ángulo θ.
R: Número de radianes del ángulo θ.

Luego se cumple:

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}} \qquad \boxed{\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{20R}{\pi} = k}$$

También: $\left\{ S = 9k \ ; \quad C = 10k \ ; \quad R = \frac{\pi k}{20} \right.$

Si: m∡: + ⇒ C > S > R Si: m∡: – ⇒ R > S > C

Sistema	Sexagesimal	Centesimal	Radial
m∠	S°	C^g	Rrad
#de grados	S	C	R
#de minutos	60S	100C	
#de segundos	3600S	10000C	

Notación:

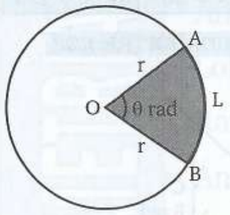
$$\boxed{\begin{array}{c} a^\circ b' c'' = a^\circ + b' + c'' \\ a^g b^m c^s = a^g + b^m + c^s \end{array}}$$

OBSERVACIÓN

$$* \ \frac{\text{Suplemento } (\alpha)}{(S^o, C^g, R \text{ rad})} = \begin{cases} (180 - S)^o \\ (200 - C)^g \\ (\pi - R) \text{ rad} \end{cases}$$

$$* \ \frac{\text{Complemento } (\alpha)}{(S^o, C^g, R \text{ rad})} = \begin{cases} (90 - S)^o \\ (100 - C)^g \\ \left(\frac{\pi}{2} - R\right) \text{ rad} \end{cases}$$

LONGITUD DE ARCO DE CIRCUFERENCIA

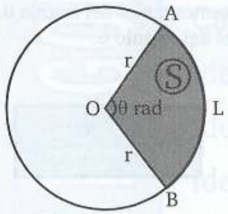


Se cumple:

$$\boxed{L = \theta r}$$

$0 < \theta \leq 2\pi$

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR (S)



Se cumple:

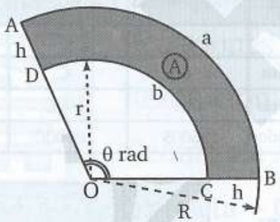
$$\boxed{S = \frac{\theta r^2}{2}}$$

$$\boxed{S = \frac{Lr}{2}}$$

$$\boxed{S = \frac{L^2}{2\theta}}$$

$0 < \theta \leq 2\pi$

ÁREA DEL TRAPECIO CIRCULAR (A)



Donde: a : Longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$

b : Longitud del arco $\overset{\frown}{CD}$

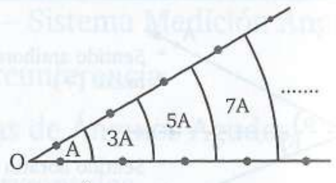
h : La distancia AD ó CB

Se cumple:

I) $\boxed{A = \frac{1}{2}\theta(R^2 - r^2)}$ II) $\boxed{A = \left(\frac{a+b}{2}\right)h}$

También: $\boxed{\theta = \frac{a-b}{h}}$ III) $\boxed{A = \frac{a^2-b^2}{2\theta}}$

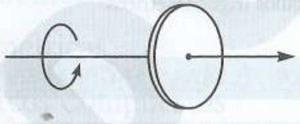
OBSERVACIÓN



A: Área del sector circular

NÚMERO DE VUELTAS

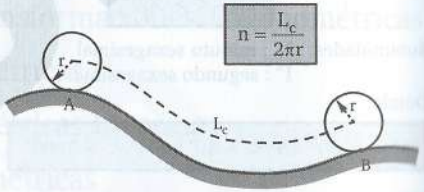
1) Cuando la rueda gira:



$$\boxed{n = \frac{\theta}{2\pi}}$$

2) Cuando la rueda se desplaza sin resbalar:

$$\boxed{n = \frac{L_c}{2\pi r}}$$



Donde:

n : Número de vueltas que da la rueda al desplazarse desde A hacia B.

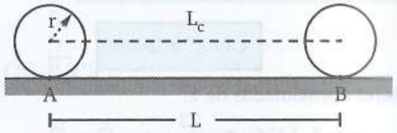
L_c : Longitud recorrida por el centro de la rueda.

r : Radio de la rueda.

θ : Número de radianes del ángulo central.

CASOS PARTICULARES

1) Superficie Lineal:

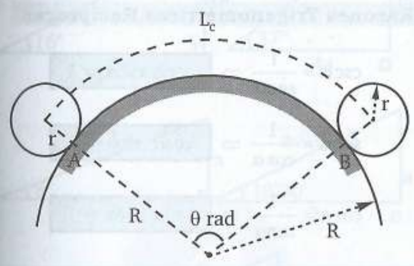


$$\boxed{n = \frac{L}{2\pi r}}$$ * $L = L_c$

---

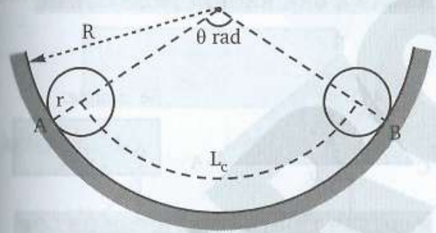
2) Superficie Curva:

(i) Superficie Convexa



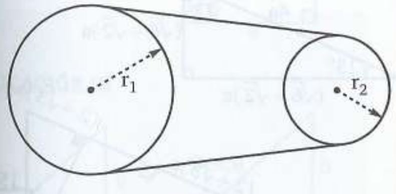
$$\boxed{n = \frac{\theta(R + r)}{2\pi r}}$$

(ii) Superficie Cóncava

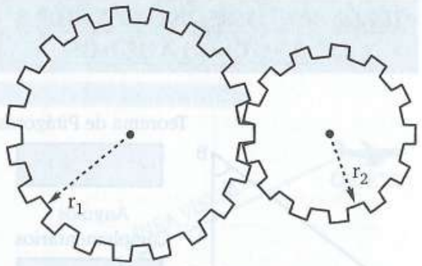


$$\boxed{n = \frac{\theta(R - r)}{2\pi r}}$$

POLEAS UNIDAS POR UNA FAJA Y ENGRANAJES EN CONTACTO



$$\boxed{\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2}$$



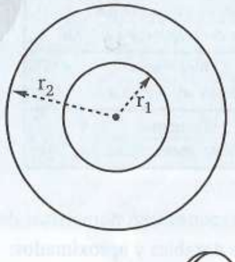
$$\boxed{n_1 r_1 = n_2 r_2}$$

Donde:

θ_1 y n_1 : Ángulo de giro y el número de vueltas de la rueda (r_1)

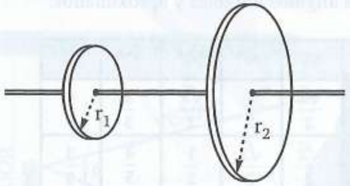
θ_2 y n_2 : Ángulo de giro y el número de vueltas de la rueda (r_2)

POLEAS UNIDAS POR SUS CENTROS



$$\boxed{\theta_1 = \theta_2}$$

$$\boxed{n_1 = n_2}$$

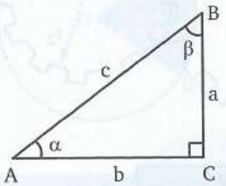


Donde:

θ_1 y n_1: Ángulo de giro y número de vueltas de la rueda (r_1)

θ_2 y n_2: Ángulo de giro y número de vueltas de la rueda (r_2)

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS



Teorema de Pitágoras

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Ángulos Complementarios

$$\boxed{\alpha + \beta = 90°}$$

$$\boxed{c > a \wedge c > b}$$

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo se define:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{c}{a}$$

Calcularemos las razones trigonométricas de los siguientes ángulos notables y aproximados:

∠ / R.T.	45°	30°	60°	37°	53°
senα	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
cosα	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
tanα	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
cotα	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
secα	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
cscα	$\sqrt{2}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS AGUDOS

Razones Trigonométricas Recíprocas

$$\csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\alpha\,\csc\alpha = 1}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha\,\sec\alpha = 1}$$

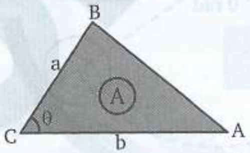
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha\,\cot\alpha = 1}$$

Razones Trigonométricas de Ángulos Complementarios si: $\alpha + \beta = 90°$

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha = \cos\beta} \qquad \boxed{\sec\alpha = \csc\beta}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \cot\beta}$$

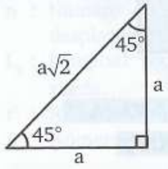
ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

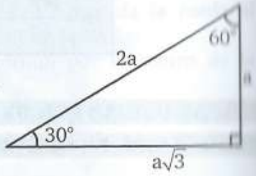


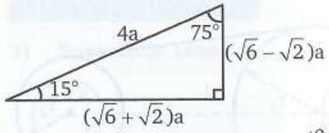
Se cumple:

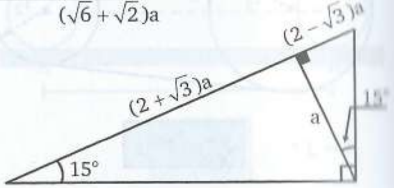
$$\boxed{A = \frac{1}{2}\,ab\,\text{sen}\theta}$$

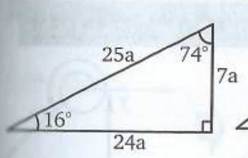
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS NOTABLES Y APROXIMADOS

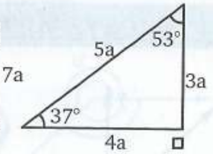


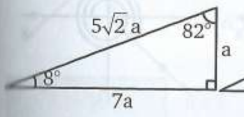


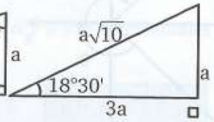


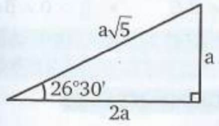








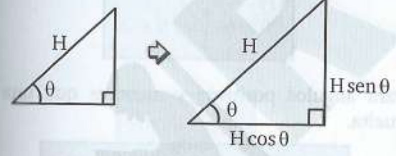




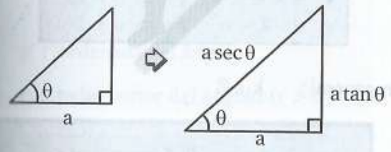
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

$$\boxed{\frac{[\text{lado incognita}]}{[\text{lado dato}]} = \text{R.T.}(\angle)}$$

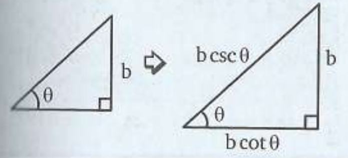
APLICACIÓN I



APLICACIÓN II

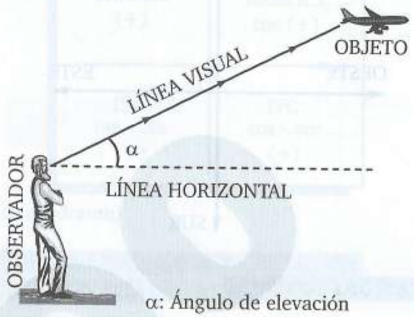


APLICACIÓN III



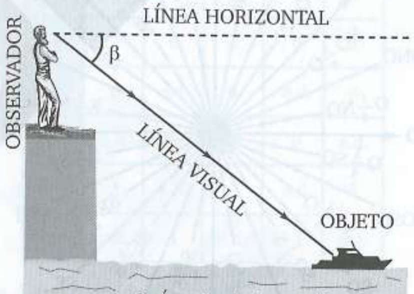
ÁNGULOS VERTICALES

ÁNGULO DE ELEVACIÓN



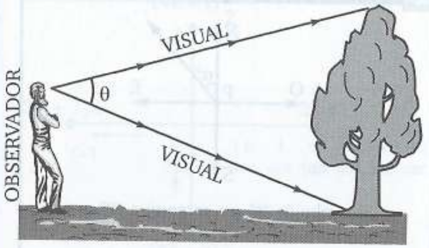
α: Ángulo de elevación

ÁNGULO DE DEPRESIÓN



β: Ángulo de depresión

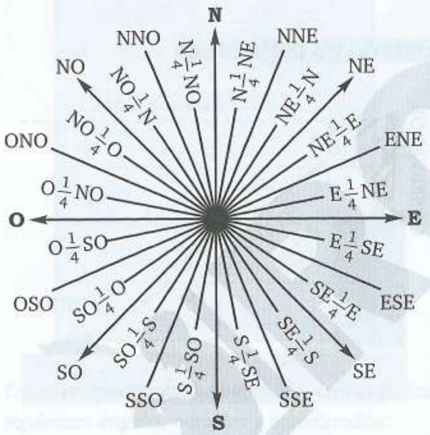
ÁNGULO DE OBSERVACIÓN



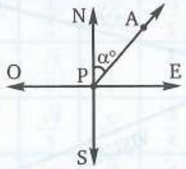
La gráfica muestra el ángulo de observación "θ" con la cual la persona "ve" al árbol.

ÁNGULOS HORIZONTALES

LA ROSA NAUTICA

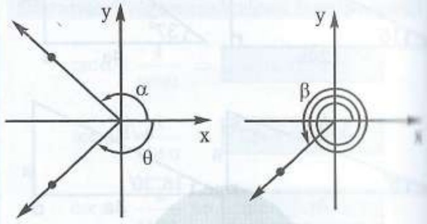


OBSERVACIÓN



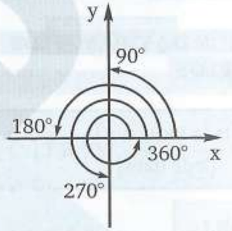
- El rumbo de "A" con respecto a "P" es α° al este del norte.
- La dirección de "A" con respecto a "P" es Nα°E (norte α° este).

ÁNGULOS EN POSICIÓN ESTÁNDAR



- $\alpha > 0 \wedge \alpha \in$ II C
- $\beta > 0 \wedge \beta \in$ IIIC
- $\theta < 0 \wedge \theta \in$ III C

ÁNGULOS CUADRANTALES



$$\boxed{90°n \text{ ó } \frac{\pi}{2}n \,,\, n \in \mathbb{Z}}$$

Para ángulos positivos y menores que una vuelta.

- $0 < \alpha < \pi/2 \Rightarrow \alpha \in$ IC
- $\pi/2 < \alpha < \pi \Rightarrow \alpha \in$ IIC
- $\pi < \alpha < 3\pi/2 \Rightarrow \alpha \in$ IIIC
- $3\pi/2 < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha \in$ IVC

En general : $k \in \mathbb{Z}$

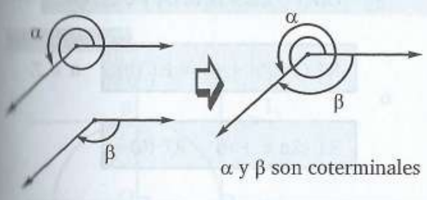
$$2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in \text{IC}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \pi \Rightarrow \alpha \in \text{IIC}$$

$$\pi + 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in \text{IIIC}$$

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2k\pi + 2\pi \Rightarrow \alpha \in \text{IVC}$$

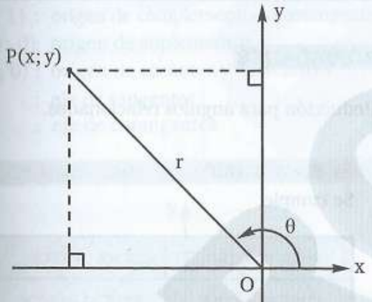
ÁNGULOS COTERMINALES



α y β son coterminales

$\boxed{\alpha - \beta = 360° \,.\, n}$; $n \in \mathbb{Z}$ $\boxed{RT(\alpha) = RT(\beta)}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN ESTÁNDAR



$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Donde:

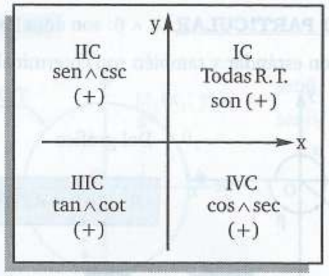
x : abscisa del ángulo

y : ordenada del ángulo

r : radio vector del ángulo (r > 0)

$\text{sen}\theta = \frac{y}{r}$	$\csc\theta = \frac{r}{y}$
$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\sec\theta = \frac{r}{x}$
$\tan\theta = \frac{y}{x}$	$\cot\theta = \frac{x}{y}$

Signos de la razones trigonométricas en los cuadrantes



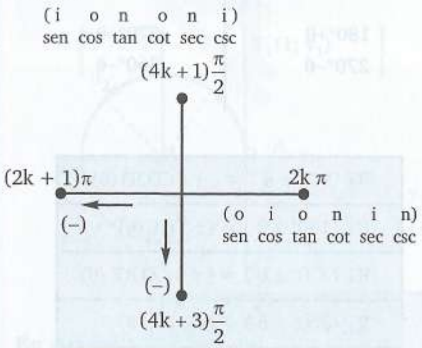
(C: cuadrante)

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

R.T. ∠	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	n.d.	0	n.d.	0
cot	n.d.	0	n.d.	0	n.d.
sec	1	n.d.	-1	n.d.	1
csc	n.d.	1	n.d.	-1	n.d.

n.d. (no definido)

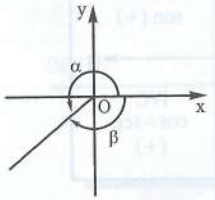
También:



* $k \in \mathbb{Z}$
* i = 1, n: no definido

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COTERMINALES

CASO PARTICULAR: $\alpha \wedge \beta$: son ángulos en posición estándar y también son coterminales



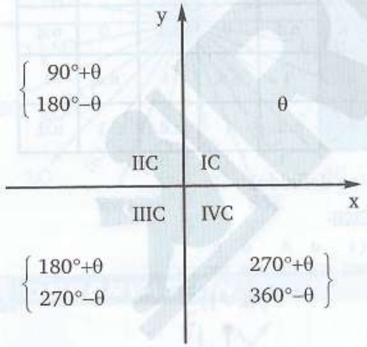
Del gráfico

$$\boxed{R.\,T(\alpha) = R.\,T(\beta)}$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

CASO I: PARA ÁNGULOS POSITIVOS MENORES A UNA VUELTA

Considerando a "θ" como un ángulo agudo, tenemos:



RT (90° + θ) = (±) CO.RT(θ)
RT (180° ± θ) = (±) RT (θ)
RT (270° ± θ) = (±) CO.RT (θ)
RT (360° – θ) = (±) RT (θ)

CASO II: PARA ÁNGULOS POSITIVOS MAYORES A UNA VUELTA

$$\boxed{RT\,(360°n + \theta) = RT\,(\theta)} \quad n \in \mathbb{Z}$$

ó

$$\boxed{RT\,(2n\,\pi + \theta) = RT\,(\theta)}$$

CASO III: PARA ÁNGULOS NEGATIVOS

sen (–θ) = –sen θ	cos (–θ) = cos θ
tan (–θ) = –tan θ	cot (–θ) = –cot θ
sec (–θ) = sec θ	csc (–θ) = –csc θ

PROPIEDADES

* Reducción para ángulos relacionados.

i) Si: x + y = 180°
Se cumple:

senx = seny	cscx = cscy
cosx = – cosy	secx = – secy
tanx = – tany	cotx = – coty

ii) Si: A + B = 270°
Se cumple:

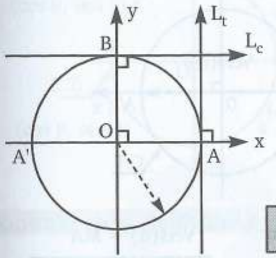
senA = – cosB	cosA = – senB
tanA = cotB	cotA = tanB
secA = – cscB	cscA = – secB

iii) Si: α + β = 360°
Se cumple:

senα = – senβ	cscα = – cscβ
cosα = cosβ	secα = secβ
tanα = – tanβ	cotα = – cotβ

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

DEFINICIÓN

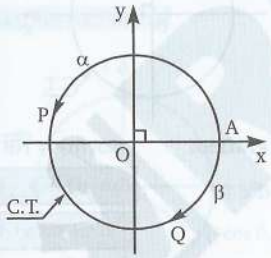


$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

Elementos de la C.T:

A(1; 0) : origen de arcos o tangentes
B(0; 1) : origen de complementos o cotangentes
A'(-1; 0): origen de suplementos
O(0; 0) : origen de secantes y cosecantes
L_t : eje de tangentes
L_c : eje de cotangentes

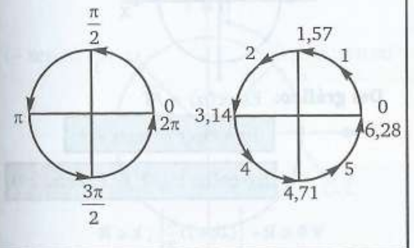
ARCOS DIRIGIDOS EN POSICIÓN NORMAL



$\alpha \wedge \beta$: son arcos en posición estándar

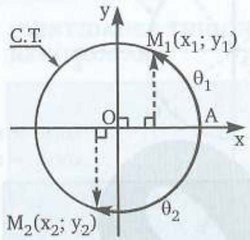
OBSERVACIÓN

En la C T



PRESENTACIÓN TRIGONOMÉTRICA EN LA C. T.

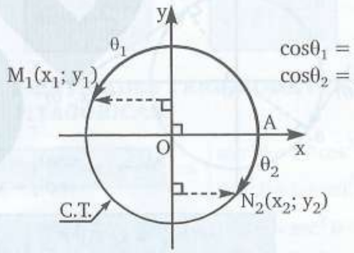
1. SENO



$\text{sen}\theta_1 = y_1$
$\text{sen}\theta_2 = y_2$

En general: $\boxed{-1 \le \text{sen}\theta \le 1;\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}}$

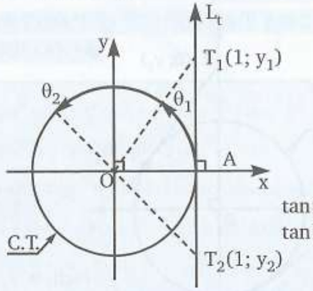
2. COSENO



$\cos\theta_1 = x_1$
$\cos\theta_2 = x_2$

En general: $\boxed{-1 \le \cos\theta \le 1;\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}}$

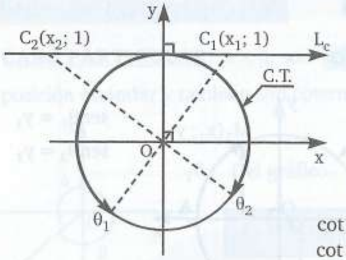
3. TANGENTE



$\tan\theta_1 = y_1$
$\tan\theta_2 = y_2$

En general:
$$\boxed{\begin{array}{c} \tan\theta \in \mathbb{R} \\ \forall\ \theta \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{R} \end{array}}$$

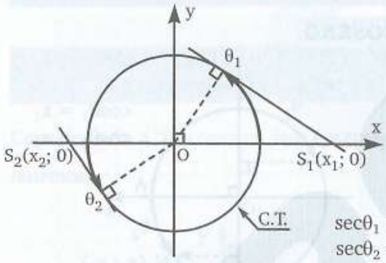
4. COTANGENTE



$\cot\theta_1 = x_1$
$\cot\theta_2 = x_2$

En general: $\boxed{\begin{array}{c}\cot\theta \in \mathbb{R} \\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}-\{k\pi\};\ k \in \mathbb{R}\end{array}}$

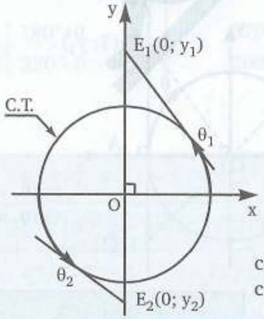
5. SECANTE



$\sec\theta_1 = x_1$
$\sec\theta_2 = x_2$

En general: $\boxed{\begin{array}{c}\sec\theta \le -1 \vee \sec\theta \ge 1 \\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}-\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{R}\end{array}}$

6. COSECANTE

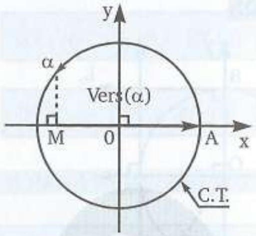


$\csc\theta_1 = y_1$
$\csc\theta_2 = y_2$

En general: $\boxed{\begin{array}{c}\csc\theta \le -1 \vee \csc\theta \ge 1 \\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}-\{k\pi\};\ k\in\mathbb{R}\end{array}}$

DEFINICIONES AUXILIARES

SENO VERSO Ó VERSO DE (α)



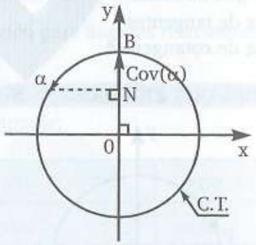
Del gráfico: $\text{Vers}(\alpha) = \overline{MA}$

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Vers}(\alpha) = 1 - \cos\alpha}$

$\boxed{0 \le \text{Vers}(\alpha) \le 2}$

COSENO VERSO Ó COVERSO (α)



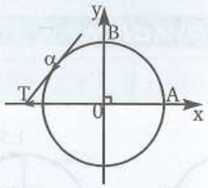
Del gráfico: $\text{Cov}(\alpha) = \overline{NB}$

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Cov}(\alpha) = 1 - \text{sen}\alpha}$

$\boxed{0 \le \text{Cov}(\alpha) \le 2}$

EX-SECANTE DE UN ARCO (α)



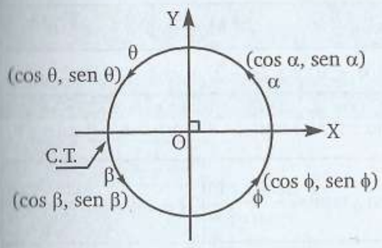
Del gráfico: $\text{Exsec}(\alpha) = \overline{AT}$

$\boxed{\text{Exsec}(\alpha) = \sec\alpha - 1}$

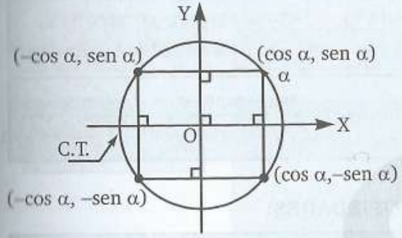
$\boxed{\text{Exsec}(\alpha) \le -2\ \vee\ \text{Exsec}\alpha \ge 0}$

$\forall\ \theta \in \mathbb{R}-\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{R}$

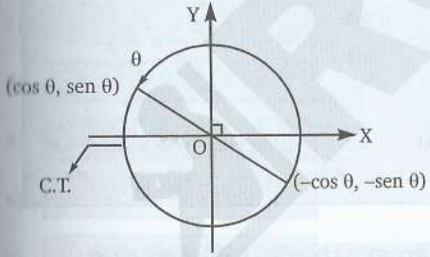
COORDENADAS DEL EXTREMO DE ARCO



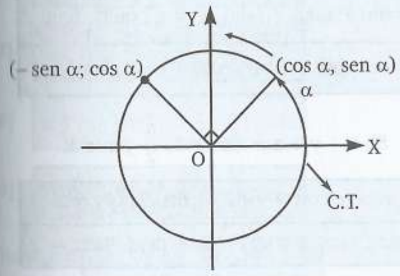
COORDENADAS SIMÉTRICAS



COORDENADAS OPUESTAS



También:



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

I. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS:

$$\boxed{\begin{array}{l}\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\theta} \Rightarrow \text{sen}\theta\ .\ \csc\theta = 1, \theta \ne n\pi \\ \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta\ .\ \sec\theta = 1, \theta \ne (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \tan\theta\ .\ \cot\theta = 1, \theta \ne \dfrac{n\pi}{2} \\ \hfill n \in \mathbb{Z}\end{array}}$$

II. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS POR COCIENTE:

$\boxed{\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}}$ y $\boxed{\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}}$

III. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PITAGÓRICAS:

$$\boxed{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1} \Rightarrow \begin{cases}\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \\ \cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta\end{cases}$$

$$\boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta} \Rightarrow \begin{cases}\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \\ \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1\end{cases}$$

$$\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta} \Rightarrow \begin{cases}\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1 \\ \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1\end{cases}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

- $\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta\ .\ \cos^2\theta$
- $\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\text{sen}^2\theta\ .\ \cos^2\theta$
- $\text{sen}^8\theta + \cos^8\theta = 1 - 4\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + 2\text{sen}^4\theta\cos^4\theta$
- $(1 \pm \text{sen}\,\theta \pm \cos\theta)^2 = 2(1 \pm \text{sen}\,\theta)(1 \pm \cos\theta)$
- $(\text{sen}\,\theta \pm \cos\theta)^2 = 1 \pm 2\text{sen}\,\theta\cos\theta$
- $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\ .\ \csc\theta$
- $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\ .\ \csc^2\theta$
- $\tan^2\theta - \text{sen}^2\theta = \tan^2\theta\ .\ \text{sen}^2\theta$

- $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta \, . \cos^2\theta$
- $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 \mp \cos\theta} = \dfrac{1 \pm \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
- $\dfrac{\cos\theta}{1 \mp \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1 \pm \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
- $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + 1)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

OBSERVACIÓN

$\text{Si}: \quad a\operatorname{sen}x + b\cos x = c$

$\text{donde}: \; a^2 + b^2 = c^2$

$$\operatorname{sen}x = \frac{a}{c} \;\wedge\; \cos x = \frac{b}{c}$$

IDENTIDADES DE LOS ARCOS COMPUESTOS

IDENTIDADES PARA LA SUMA DE ARCOS

$$\operatorname{sen}(\alpha + \theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan(\alpha + \theta) = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\theta}$$

IDENTIDADES PARA LA DIFERENCIA DE ARCOS

$$\operatorname{sen}(\alpha - \theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha\tan\theta}$$

OTRAS IDENTIDADES

$$\operatorname{sen}(\alpha + \theta)\operatorname{sen}(\alpha - \theta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos(\alpha + \theta)\cos(\alpha - \theta) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\tan\alpha \pm \tan\theta \pm \tan(\alpha \pm \theta)\tan\alpha\tan\theta = \tan(\alpha \pm \theta)$$

$$\tan\alpha \pm \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \theta)}{\cos\alpha\cos\theta} \qquad \cot\alpha \pm \cot\theta = \frac{\operatorname{sen}(\theta \pm \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}(x+y+z) = \operatorname{sen}x\cos y\cos z + \operatorname{sen}y\cos x\cos z + \operatorname{sen}z\cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z$$

$$\cos(x+y+z) = \cos x\cos y\cos z - \cos x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z - \cos y\operatorname{sen}x\operatorname{sen}z - \cos z\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

$$\tan(x+y+z) = \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x\tan y\tan z}{1 - \tan x\tan y - \tan y\tan z - \tan x\tan z}$$

PROPIEDADES:

I. $\{a; b\} \subset \mathbb{R}$

$$a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(x + \phi)$$

donde:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \;\wedge\; \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

II. $-\underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\text{min}} \leq a\operatorname{sen}x + b\cos x \leq \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\text{max}}$

PROPIEDADES PARA 3 ÁNGULOS

I. Si: $\alpha + \beta + \theta = n\pi \; ; n \in \mathbb{R}$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha \, . \tan\beta \, . \tan\theta$$

$$\cot\alpha \, . \cot\beta + \cot\beta \, . \cot\theta + \cot\alpha \, . \cot\theta = 1$$

II. Si: $x + y + z = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2} \; ; \; n \in \mathbb{R}$

$$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \, . \cot y \, . \cot z$$

$$\tan x \, . \tan y + \tan y \, . \tan z + \tan x \, . \tan z = 1$$

IDENTIDADES DE LOS ARCOS MÚLTIPLES

IDENTIDADES DEL ARCO DOBLE

I. $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

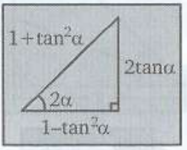
II. $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Despejando:

$\cos2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos2\alpha$

$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \;\Rightarrow\; 2\cos^2\alpha = 1 + \cos2\alpha$

III. $\tan2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \;\Rightarrow$



OTRAS IDENTIDADES

1) $\sec2\alpha + 1 = \tan2\alpha \, . \cot\alpha$

2) $\sec2\alpha - 1 = \tan2\alpha \, . \tan\alpha$

3) $\cot\alpha + \tan\alpha = 2\csc2\alpha$

4) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot2\alpha$

5) $(\operatorname{sen}\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \operatorname{sen}2\alpha$

6) $\operatorname{sen}^4\alpha = \dfrac{3 - 4\cos2\alpha + \cos4\alpha}{8}$

7) $\cos^4\alpha = \dfrac{3 + 4\cos2\alpha + \cos4\alpha}{8}$

8) $\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos4\alpha$

9) $\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos4\alpha$

También: $-0.5 \leq \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \leq 0.5$

* En forma general si n y m son números enteros positivos, tal que al menos uno de ellos es impar se cumple:

$$-\sqrt{\frac{n^n.m^m}{(n+m)^{n+m}}} \leq (\operatorname{sen}x)^n . (\cos x)^m \leq \sqrt{\frac{n^n.m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

** En el caso de que m y n sean números pares positivos, se cumple que:

$$0 \leq (\operatorname{sen}x)^n . (\cos x)^m \leq \sqrt{\frac{n^n.m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

En general:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \operatorname{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x \leq 1; \forall x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$$

IDENTIDADES DEL ARCO MITAD

I. $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$

II. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$

III. $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

El signo (+) ó (-) dependerá del cuadrante del arco "$\dfrac{\alpha}{2}$"

OTRAS IDENTIDADES

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha \qquad \cot\dfrac{\alpha}{2} = \csc\alpha + \cot\alpha$

$\cot\dfrac{\alpha}{2} - \tan\dfrac{\alpha}{2} = 2\cot\alpha \qquad \cot\dfrac{\alpha}{2} + \tan\dfrac{\alpha}{2} = 2\csc\alpha$

$$\csc x + \csc2x + \csc4x + ... + \csc2^n x = \cot\frac{x}{2} - \cot2^n x$$

IDENTIDADES DEL ARCO TRIPLE

I.

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha$$

$$\text{sen}3\alpha = \text{sen}\alpha(2\cos 2\alpha + 1)$$

Despejando:

$$4\text{sen}^3\alpha = 3\text{sen}\alpha - \text{sen}3\alpha$$

II.

$$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\cos3\alpha = \cos\alpha(2\cos2\alpha - 1)$$

Despejando:

$$4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos3\alpha$$

III.

$$\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

OTRAS IDENTIDADES

$$4\text{sen}\,(60° - \alpha)\ \text{sen}\alpha\ \text{sen}(60° + \alpha) = \text{sen}3\alpha$$

$$4\cos\,(60° - \alpha)\ \cos\alpha\ \cos(60° + \alpha) = \cos3\alpha$$

$$\tan\alpha\ .\ \tan(60° - \alpha)\ \tan(60° + \alpha) = \tan3\alpha$$

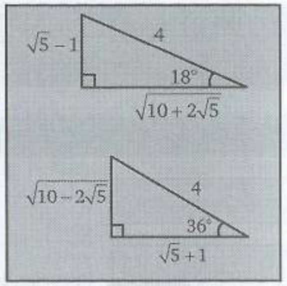
OTRAS IDENTIDADES

$$\frac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos 2\alpha - 1}$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 18° Y 36°

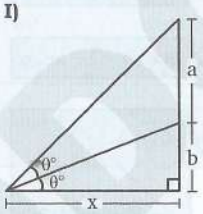
$$\text{sen}18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$



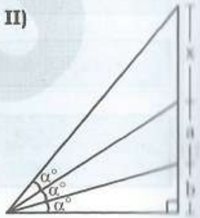
OBSERVACIÓN:

I)



$$x = b.\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

II)



$$x = \frac{a^2}{2b-a}$$

III)

- $\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cos8\alpha...\cos2^n\alpha = \dfrac{\text{sen}(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}.\text{sen}\,\alpha}$
- $\tan\alpha + 2\tan2\alpha + 4\tan4\alpha + ... + 2^{n-2}.\tan2^{n-2}\alpha +$ $+2^{n-1}.\cot2^{n-1}\alpha = \cot\alpha$
- $\dfrac{1}{2}.\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + \dfrac{1}{2^2}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2^2}\right) + ... + \dfrac{1}{2^n}.\tan\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right) =$ $= \dfrac{1}{2^n}.\cot\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right) - \cot\alpha$
- $2\text{sen}\dfrac{\pi}{2^n} = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}}_{(n-1)\text{radicales}}$
- $2\cos\dfrac{\pi}{2^n} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}}_{(n-1)\text{radicales}}$

IDENTIDADES PARA TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES PARA TRANSFORMAR SUMAS O DIFERENCIAS A PRODUCTO

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\theta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$\text{sen}\alpha - \text{sen}\theta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\theta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\theta = -2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

PROPIEDADES:

a) Si: A + B + C = 180°. Se cumple:

$$\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2} + 1$$

$$\text{sen}\,2A + \text{sen}\,2B + \text{sen}\,2C = 4\,\text{sen}\,A\ \text{sen}\,B\ \text{sen}\,C$$

$$\cos2A + \cos2B + \cos2C = -4\cos A\cos B\cos C - 1$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = -2\cos A\cos B\cos C + 1$$

b) Si: A + B + C = 360°. Se cumple:

$$\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C = 4\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = -4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1$$

c) Si: A + B + C + D = 360°. Se cumple:

$$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B + \text{sen}\,C + \text{sen}\,D = \\ = 4\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A+D}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = \\ = 4\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+D}{2}\right)$$

d)

$$\text{sen}(x - 120°) + \text{sen}x + \text{sen}(x + 120°) = 0$$

$$\cos(x - 120°) + \cos x + \cos(x + 120°) = 0$$

e)

$$\text{sen}^2(x-120°) + \text{sen}^2x + \text{sen}^2(x+120°) = \frac{3}{2}$$

$$\cos^2(x-120°) + \cos^2x + \cos^2(x+120°) = \frac{3}{2}$$

f)

$$\text{sen}^3(x-120°) + \text{sen}^3x + \text{sen}^3(x+120°) = -\frac{3}{4}\text{sen}\,3x$$

$$\cos^3(x-120°) + \cos^3x + \cos^3(x+120°) = \frac{3}{4}\cos3x$$

g)

$$\text{sen}^4(x-120°) + \text{sen}^4x + \text{sen}^4(x+120°) = \frac{9}{8}$$

$$\cos^4(x-120°) + \cos^4x + \cos^4(x+120°) = \frac{9}{8}$$

IDENTIDADES PARA TRANSFORMAR PRODUCTOS A SUMAS O DIFERENCIAS

$$2\,\text{sen}\alpha\ \cos\theta = \text{sen}(\alpha + \theta) + \text{sen}(\alpha - \theta)$$

$$2\cos\alpha\ \cos\theta = \cos(\alpha + \theta) + \cos(\alpha - \theta)$$

$$2\,\text{sen}\alpha\ \text{sen}\theta = \cos(\alpha - \theta) - \cos(\alpha + \theta)$$

SUMA DE SERIES FINITAS

Series de senos y cosenos

I) Sumas de senos cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética.

$$\text{sen}x + \text{sen}(x + r) + \text{sen}(x + 2r) + \ldots$$
$$\ldots + \text{sen}(x + (n - 1)\,r) = \frac{\text{sen}\frac{nr}{2}}{\text{sen}\frac{r}{2}}\,.\,\text{sen}\left(\frac{p+u}{2}\right)$$

Donde: p : Primer ángulo n : N° de términos
u : Último ángulo r : Razón

II) En forma similar la suma de cosenos cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética.

$$\cos x + \cos(x + r) + \cos(x + 2r) + \ldots$$
$$\ldots + \cos(x + (n - 1)r) = \frac{\text{sen}\frac{nr}{2}}{\text{sen}\frac{r}{2}}\,.\,\cos\left(\frac{p+u}{2}\right)$$

PROPIEDADES:

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$. Se cumple

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{-1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

PRODUCTOS TRIGONOMÉTRICOS NOTABLES

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$. Se cumple:

$$\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}\,.\,\text{sen}\frac{2\pi}{2n+1}\,.\,\text{sen}\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\ldots\text{sen}\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\,.\,\cos\frac{2\pi}{2n+1}\,.\,\cos\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

$$\tan\frac{\pi}{2n+1}\,.\,\tan\frac{2\pi}{2n+1}\,.\,\tan\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\ldots\tan\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

FUNCIÓN PAR

$$f(-x) = f(x)\ ;\ \forall\, x;\ -x \in \text{Dom } f$$

FUNCIÓN IMPAR

$$f(-x) = -f(x)\ ;\ \forall\, x;\ -x \in \text{Dom } f$$

FUNCIÓN CRECIENTE

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

FUNCIÓN DECRECIENTE

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

FUNCIÓN PERIÓDICA

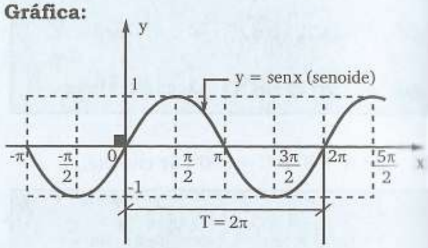
$$f(x + T) = f(x);\ \forall\, x;\ x + T \in \text{Dom } f$$

ESTUDIO DE LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIÓN SENO

$$F = \{(x;y)\,/\,y = \text{sen}\,x\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$$

Gráfica:



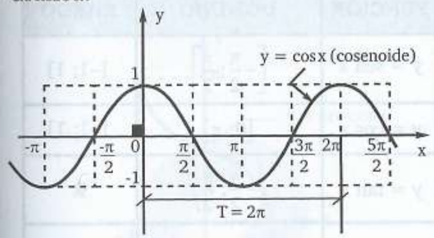
Análisis del gráfico:

Domino : $Df \in \mathbb{R}$
Rango : $Rf \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \text{sen}\,x \leq 1$
Período : $T = 2\pi$
Es una función impar : sen(–x) = – sen x

FUNCIÓN COSENO

$$F = \{(x;y)\,/\,y = \cos x;\ x \in \mathbb{R}\}$$

Gráfica:



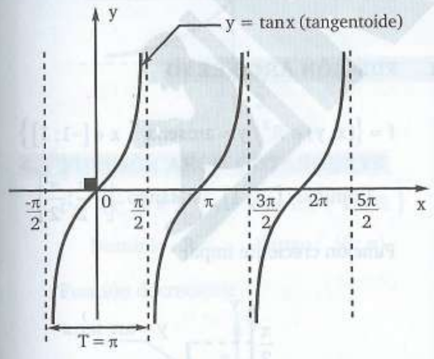
Análisis del gráfico:

Dominio : $Df \in \mathbb{R}$
Rango : $Rf \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$
Periodo : $T = 2\pi$
Es una función par: cos(–x) = cos x

FUNCIÓN TANGENTE

$$F = \left\{(x;y)\Big/y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\Big/n \in \mathbb{R}\right\}\right\}$$

Gráfica:



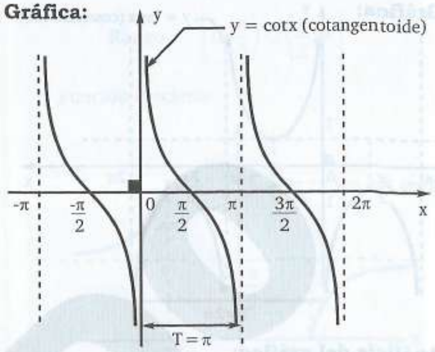
Análisis del gráfico:

Dominio : $Df \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{R}\right\}$
Rango : $Rf \in \mathbb{R}$
Periódo : $T = \pi$
Es una función impar: tan (–x) = –tan x

FUNCIÓN COTANGENTE

$$F = \{(x;y)\,/\,y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} - \{n\pi\,/\,n \in \mathbb{R}\}\}$$

Gráfica:



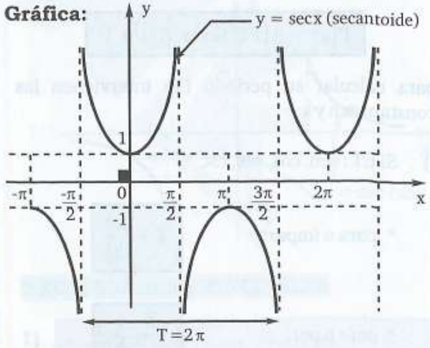
Análisis del gráfico:

Dominio : $Df \in \mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{R}\}$
Rango : $Rf \in \mathbb{R}$
Periodo : $T = \pi$
Es una función impar : cot(–x) = –cot x

FUNCIÓN SECANTE

$$F = \left\{(x;y)\Big/y = \sec x;\ x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\Big/n \in \mathbb{R}\right\}\right\}$$

Gráfica:



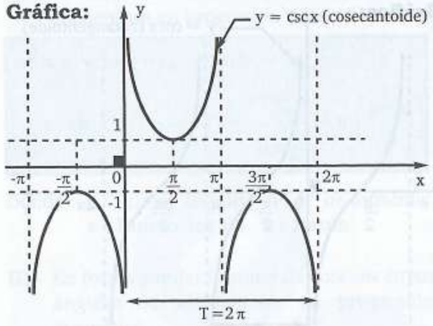
Análisis del gráfico:

Dominio : $Df \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{R}\right\}$
Rango : $Rf \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$
$\Rightarrow \sec x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
Periodo : $T = 2\pi$
Es una función par: sec(–x) = secx

FUNCIÓN COSECANTE

$$\boxed{F = \{(x; y) / y = \csc x;\ x \in \mathbb{R} - \{nx / n \in \mathbb{R}\}\}}$$

Gráfica:



Análisis del gráfico:

Dominio : $Df \in \mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{R}\}$

Rango : $Rf \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

$\Rightarrow \csc x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

Período : $T = 2\pi$

Es una función impar: $\csc(-x) = -\csc x$

CÁLCULO DE PERIODOS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea la función:

$$\boxed{F(x) = A[FT^n(kx + C)] + D}$$

para calcular su periodo (T) intervienen las constantes n y k.

i) Si F.T.: sen, cos, sec, csc

* para n impar: $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{|k|}}$

* para n par: $\boxed{T = \dfrac{\pi}{|k|}}$

ii) Si F T: tan, cot

* para n par ó impar: $\boxed{T = \dfrac{\pi}{|k|}}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
y = sen x	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	[–1; 1]
y = cos x	[0; π]	[–1; 1]
y = tan x	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$	ℝ
y = cot x	⟨0; π⟩	ℝ
y = sec x	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$	ℝ – ⟨–1; 1⟩
y = csc x	$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$	ℝ – ⟨–1; 1⟩

Notación:

Si: $f.t(\theta) = N \Rightarrow$ $\boxed{\theta = \text{arc}\,ft(N)}$ $\boxed{\theta = ft^{-1}(N)}$

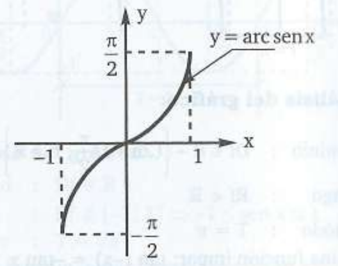
Se lee: θ es un arco cuya función trigonométrica es N

1. FUNCIÓN ARCO SENO

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{arcsen}\,x\ ;\ x \in [-1; 1]\}$$

Dominio : [–1; 1] Rango : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Función creciente impar

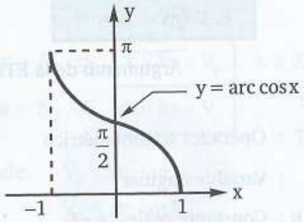


2. FUNCIÓN ARCO COSENO

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{arccos}\,x\ ;\ x \in [-1; 1]\}$$

Dominio : [–1; 1] Rango : [0; π]

Función decreciente

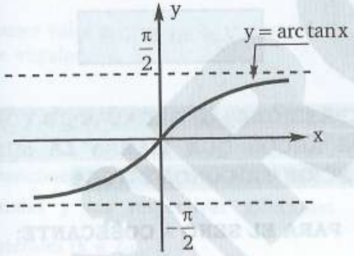


3. FUNCIÓN ARCO TANGENTE

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{arctan}\,x\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$$

Dominio : ℝ Rango : $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Función creciente e impar

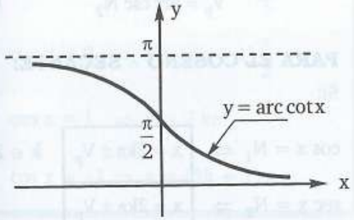


4. FUNCIÓN ARCO COTANGENTE

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{arccot}\,x\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$$

Dominio : ℝ Rango : ⟨0; π⟩

Función decreciente



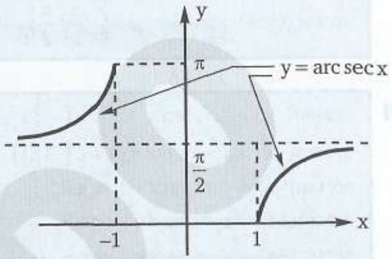
5. FUNCIÓN ARCO SECANTE

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{arcsec}\,x;\ x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle\}$$

Dominio : ⟨–∞; –1] ∪ [1; +∞⟩

Rango : $\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Función creciente



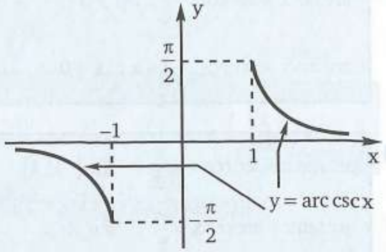
6. FUNCIÓN ARCO COSECANTE

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{arccsc}\,x;\ x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle\}$$

Dominio : ⟨–∞; –1] ∪ [1; +∞⟩

Rango : $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$

Función decreciente e impar



PROPIEDADES PRINCIPALES

1)

sen (arcsen(N)) = N	;	N ∈ [–1; 1]
cos (arccos(N)) = N	;	N ∈ [–1; 1]
tan (arctan(N)) = N	;	N ∈ ℝ
cot (arccot(N)) = N	;	N ∈ ℝ
sec (arcsec(N)) = N	;	N ∈ ℝ – ⟨–1; 1⟩
csc (arccsc(N)) = N	;	N ∈ ℝ – ⟨–1; 1⟩

2)

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\operatorname{arccos}(\cos\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in [0; \pi]$

$\operatorname{arctan}(\tan\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

$\operatorname{arccot}(\cot\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in \langle 0; \pi\rangle$

$\operatorname{arcsec}(\sec\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in [0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$\operatorname{arccsc}(\csc\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

3)

$\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x \quad ; \quad x \in [-1; 1]$

$\operatorname{arccos}(-x) = \pi - \operatorname{arccos} x \; ; \quad x \in [-1; 1]$

$\operatorname{arctan}(-x) = -\operatorname{arctan} x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x \; ; \quad x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x \; ; \quad x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

$\operatorname{arccsc}(-x) = -\operatorname{arccsc} x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

4)

$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right) \; ; \; -1 \le x \le 1 - \{0\}$

$\operatorname{arccos} x = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right) \; ; \; -1 \le x \le 1 - \{0\}$

$\operatorname{arctan} x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \; x > 0$

$\operatorname{arctan} x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) - \pi \; ; \; x < 0$

5)

$\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} \; ; \quad x \in [-1; 1]$

$\operatorname{arctan} x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \; ; \quad x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2} \; ; \quad x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

6)

$\operatorname{arctan} x + \operatorname{arctan} y = \operatorname{arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$

Si: $xy < 1 \Rightarrow k = 0$

Si: $xy > 1 \wedge x > 0 \Rightarrow k = 1$

Si: $xy > 1 \wedge x < 0 \Rightarrow k = -1$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL (ETE)

$$\boxed{\text{F. T. } \underbrace{(ax + b)}_{\text{Argumento de la ETE}} = N}$$

Donde:

F.T : Operador trigonométrico

x : Variable angular

a, b : Constante reales, $a \neq 0$

N : Constante real el cual pertenece al rango de la función trigonométrica

VALOR PRINCIPAL (V_p)

Sea: ET $(ax + b) = N$

$$\boxed{V_p = \text{arc FT } (N)}$$

EXPRESIONES GENERALES DE TODOS LOS ARCOS QUE TIENEN LA MISMA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

1. PARA EL SENO ∧ COSECANTE:

Si:

$\operatorname{sen} x = N_1 \Rightarrow \boxed{x = k\pi + (-1)^k V_p} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\csc x = N_2 \Rightarrow \boxed{x = k\pi + (-1)^k V_p}$

Donde: $V_p = \operatorname{arcsen} N_1$

$V_p = \operatorname{arccsc} N_2$

2. PARA EL COSENO ∧ SECANTE:

Si:

$\cos x = N_1 \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm V_p} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sec x = N_2 \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm V_p}$

Donde: $V_p = \operatorname{arccos} N_1$

$V_p = \operatorname{arcsec} N_2$

3. PARA LA TANGENTE ∧ COTANGENTE:

Si:

$\tan x = N_1 \Rightarrow \boxed{x = k\pi + V_p} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cot x = N_2 \Rightarrow \boxed{x = k\pi + V_p}$

Donde: $V_p = \text{arc} \tan N_1$

$V_p = \text{arc} \cot N_2$

SOLUCIÓN GENERAL

Es el conjunto de todos los valores que asume la variable angular.

SOLUCIÓN PRINCIPAL

Es el menor valor no negativo que asume la variable angular.

NOTA

Ecuaciones trigonométricas elementales usuales y sus respectivas soluciones generales ($k \in \mathbb{Z}$)

I. $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

II. $\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$

III. $\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = (4k - 1)\frac{\pi}{2}$

IV. $\cos x = 0 \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

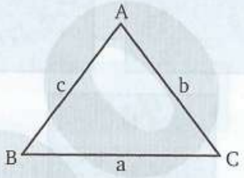
V. $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

VI. $\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k + 1)\pi$

RESOLUCIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

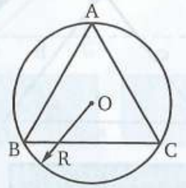
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. TEOREMA DE SENOS



$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

Con el Circunradio



$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R}$$

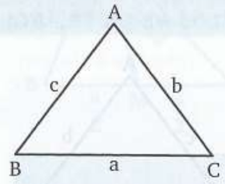
También:

$a = 2R \operatorname{sen} A$

$b = 2R \operatorname{sen} B$

$c = 2R \operatorname{sen} C$

2. TEOREMA DE COSENOS

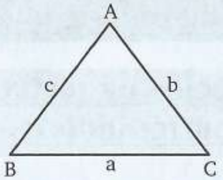


$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

3. TEOREMA DE TANGENTES

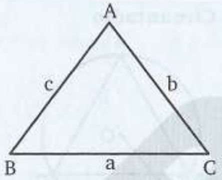


$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\frac{A-C}{2}}{\tan\frac{A+C}{2}}$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$$

4. TEOREMA DE PROYECCIONES

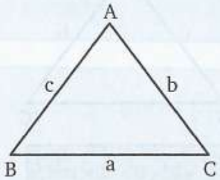


$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$b=a\cos C+c\cos A$$

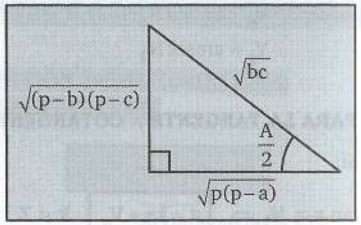
$$c=a\cos B+b\cos A$$

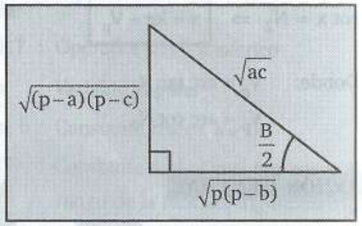
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS SEMIÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

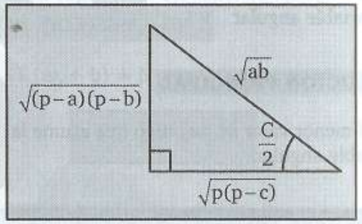


$2p = a+b+c$

$\left(\begin{array}{l}2p\text{: Perímetro del } \Delta\\ p\text{: Semiperímetro del } \Delta\end{array}\right)$

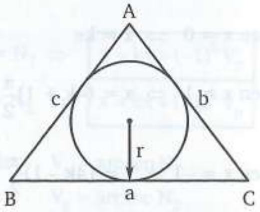






CÁLCULO DE ELEMENTOS INTERIORES

1. INRADIO

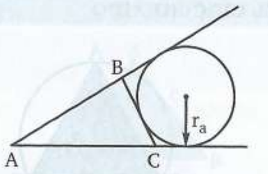


$$r=(P-a)\tan\frac{A}{2}$$

$$r=(P-b)\tan\frac{B}{2}$$

$$r=(P-c)=\tan\frac{C}{2}$$

2. EXRADIO

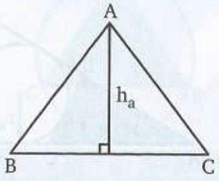


$$r_a=P\,.\,\tan\frac{A}{2}$$

$$r_b=P\,.\,\tan\frac{B}{2}$$

$$r_c=P\,.\,\tan\frac{C}{2}$$

3. ALTURA

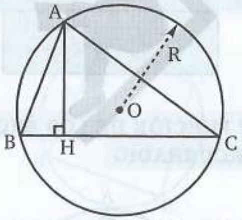


$$h_a=\frac{a\,\text{sen}B\,\text{sen}C}{\text{sen }A}$$

$$h_b=\frac{b\text{ sen }A\text{ sen }C}{\text{sen }B}$$

$$h_c=\frac{c\text{ sen }A\text{ sen }B}{\text{sen }C}$$

OTRAS FÓRMULAS



$AH = h_a$

$$h_a=2R\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C$$

$$h_a=\frac{bc}{2R}=\frac{bc}{a}\text{ sen}\,A$$

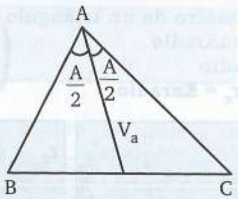
$$h_b=2R\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,C$$

$$h_b=\frac{ac}{2R}=\frac{ac}{b}\text{ sen}\,B$$

$$h_c=2R\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B$$

$$h_c=\frac{ab}{2R}=\frac{ab}{c}\text{ sen}\,C$$

4. BISECTRIZ INTERIOR

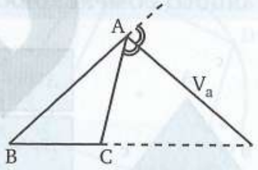


$$V_a=\frac{2bc}{b+c}\,.\,\cos\frac{A}{2}$$

$$V_b=\frac{2ac}{a+c}\,.\,\cos\frac{B}{2}$$

$$V_c=\frac{2ab}{a+b}\,.\,\cos\frac{C}{2}$$

5. BISECTRIZ EXTERIOR

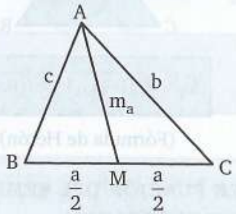


$$V_a=\frac{2bc}{|b-c|}\,.\,\text{sen}\frac{A}{2}$$

$$V_b=\frac{2ac}{|a-c|}\,.\,\text{sen}\frac{B}{2}$$

$$V_c=\frac{2ab}{|a-b|}\,.\,\text{sen}\frac{C}{2}$$

6. MEDIANA



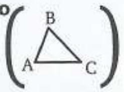
$$4m_a^2=b^2+c^2+2bc\,.\,\cos A$$

$$4m_b^2=a^2+c^2+2ac\,.\,\cos B$$

$$4m_c^2=a^2+b^2+2ab\,.\,\cos C$$

IMPORTANTES RELACIONES

2p: Perímetro de un triángulo
R: Circunradio
r: Inradio
r_a, r_b y r_c = Exradio



$$p = 4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$r_a = r\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

$$r = 4R\ \text{sen}\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{B}{2}.\ \text{sen}\frac{C}{2}$$

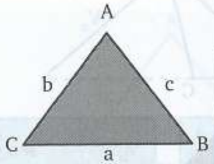
$$r_b = r\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

$$p = r\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$$

$$r_c = r\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}$$

ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR (A_T)

1. A_T EN FUNCIÓN DE DOS LADOS Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO

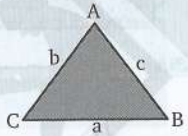


$$A_T = \frac{bc}{2}.\ \text{sen}\,A$$

$$A_T = \frac{ac}{2}.\ \text{sen}\,B$$

$$A_T = \frac{ab}{2}.\ \text{sen}\,C$$

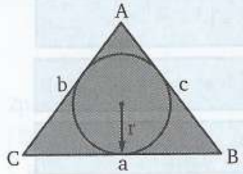
2. A_T EN FUNCIÓN DE LOS 3 LADOS



$$A_T = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

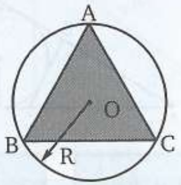
(Fórmula de Herón)

3. A_T EN FUNCIÓN DEL SEMIPERÍMETRO Y EL INRADIO



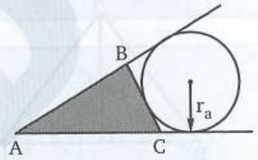
$$A_T = P\ .\ r$$

4. A_T EN FUNCIÓN DE LOS 3 LADOS Y EL CIRCUNRADIO



$$A_T = \frac{abc}{4R}$$

5. A_T EN FUNCIÓN DEL SEMIPERÍMETRO Y EL EXRADIO RELATIVO A UN LADO



$$A_T = (P-a)r_a$$

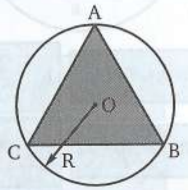
$$A_T = (P-b)r_b$$

$$A_T = (P-c)r_c$$

6. A_T EN FUNCIÓN DEL INRADIO Y LOS EXRADIOS

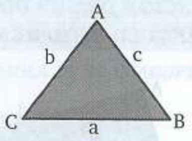
$$A_T = \sqrt{r\ .\ r_a\ .\ r_b\ .\ r_c}$$

7. A_T EN FUNCIÓN DE LOS ÁNGULOS Y EL CIRCUNRADIO



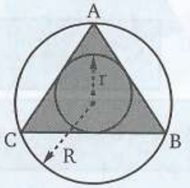
$$A_T = 2R^2.\text{sen}A.\text{sen}B.\text{sen}C$$

8. A_T EN FUNCIÓN DE LOS ÁNGULOS Y EL SEMIPERÍMETRO



$$A_T = P^2\ .\ \tan\frac{A}{2}\ .\ \tan\frac{B}{2}\ .\ \tan\frac{C}{2}$$

9. A_T EN FUNCIÓN DE LOS ÁNGULOS, EL CIRCUNRADIO Y EL INRADIO

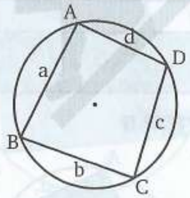


$$A_T = 4Rr\ .\ \cos\frac{A}{2}\ .\ \cos\frac{B}{2}\ .\ \cos\frac{C}{2}$$

$$A_T = r^2\ .\ \cot\frac{A}{2}\ .\ \cot\frac{B}{2}\ .\ \cot\frac{C}{2}$$

RESOLUCIÓN DE CUADRILÁTEROS

LEY DE COSENOS PARA UN CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE



$$\cos A = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

Como : $A + C = 180° \rightarrow \cos C = -\cos A$

$$\therefore\quad \cos C = \frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2(ad+bc)}$$

Análogamente:

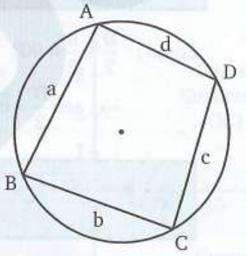
$$\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

Como : $B + D = 180° \rightarrow \cos D = -\cos B$

$$\therefore\quad \cos D = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}$$

R.T. DE LOS SEMIÁNGULOS INTERNOS DE UN CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

I. SENO Y COSENO



1. $$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{ad+bc}}$$

Como : $\frac{A}{2}+\frac{C}{2} = 90° \rightarrow \text{sen}\frac{A}{2} = \cos\frac{C}{2}$

$$\therefore\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{ad+bc}}$$

2. $$\text{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{ab+cd}}$$

Como : $\frac{B}{2}+\frac{D}{2} = 90° \rightarrow \text{sen}\frac{B}{2} = \cos\frac{D}{2}$

$$\therefore\quad \cos\frac{D}{2} = \sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{ab+cd}}$$

3. $$\boxed{\operatorname{sen}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{ad+bc}}}$$

Como : $\frac{C}{2}+\frac{A}{2}=90°$

$\rightarrow \operatorname{sen}\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{ad+bc}}}$$

4. $$\boxed{\operatorname{sen}\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{(P-c)(P-d)}{ab+cd}}}$$

Como : $\frac{D}{2}+\frac{B}{2}=90°$

$\rightarrow \operatorname{sen}\frac{D}{2}=\cos\frac{B}{2}$

$$\therefore \quad \boxed{\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-c)(P-d)}{ab+cd}}}$$

II. TANGENTE

1. $$\boxed{\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{(P-b)(P-c)}}}$$

2. $$\boxed{\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{(P-c)(P-d)}}}$$

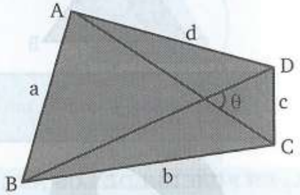
3. $$\boxed{\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{(P-a)(P-d)}}}$$

4. $$\boxed{\tan\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{(P-c)(P-d)}{(P-a)(P-b)}}}$$

Donde: P es semiperímetro del cuadrilátero

ÁREA DE REGIÓN CUADRANGULAR (A_C)

1. EN FUNCIÓN DE SUS DIAGONALES Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO

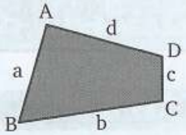


$AC = d_1 \quad BD = d_2$

$$\boxed{A_C=\frac{d_1\,.\,d_2}{2}\,.\operatorname{sen}\theta}$$

$$\boxed{A_C=\frac{1}{4}(b^2+d^2-c^2-a^2)\tan\theta}$$

2. EN FUNCIÓN DE SUS CUATRO LADOS Y DOS ÁNGULOS OPUESTOS

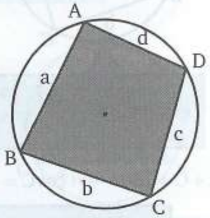


$$\boxed{A_C=\sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}}$$

ó

$$\boxed{A_C=\sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)-abcd\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)}}$$

3. INSCRIPTIBLE



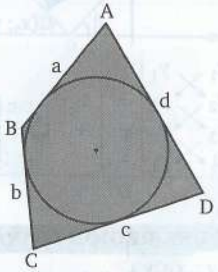
$A+C=180° \rightarrow \cos\frac{A+C}{2}=\cos 90°=0$

$B+D=180° \rightarrow \cos\frac{B+D}{2}=\cos 90°=0$

$$\boxed{A_C=\sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)}}$$

FÓRMULA DE BRAMAGUPTHA

4. CIRCUNSCRIPTIBLE

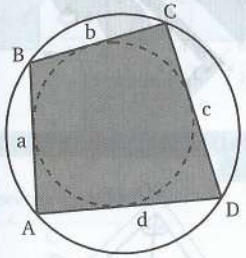


$$\boxed{A_C=\sqrt{abcd}\,.\operatorname{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

ó

$$\boxed{A_C=\sqrt{abcd}\,.\operatorname{sen}\left(\frac{B+D}{2}\right)}$$

5. INSCRIPTIBLE Y CIRCUNSCRIPTIBLE A LA VEZ: BICENTRICO



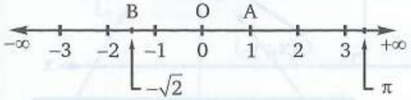
$A+C=180° \rightarrow \operatorname{sen}\frac{A+C}{2}=\operatorname{sen} 90°=1$

$B+D=180° \rightarrow \operatorname{sen}\frac{B+D}{2}=\operatorname{sen} 90°=1$

$$\boxed{A_C=\sqrt{abcd}}$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

RECTA NUMÉRICA



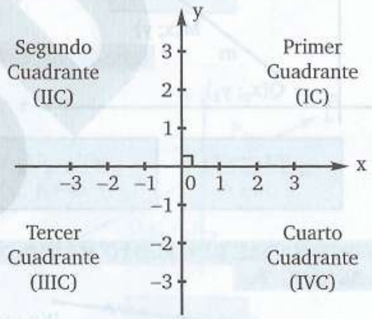
Donde:

0 : origen

1 : es la coordenada del punto A

$-\sqrt{2}$: es la coordenada del punto B

PLANO CARTESIANO

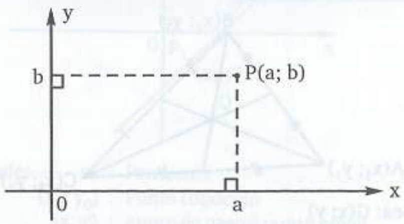


Donde: 0 : origen de coordenadas

x : eje abscisas

y : eje de ordenadas

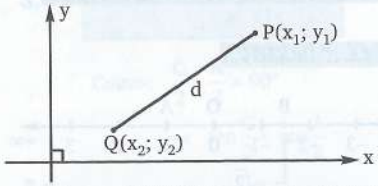
UBICACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO CARTESIANO



Donde: a : abscisa de P

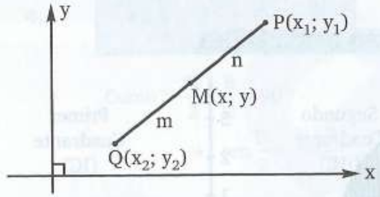
b : ordenada de P

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



$$d = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

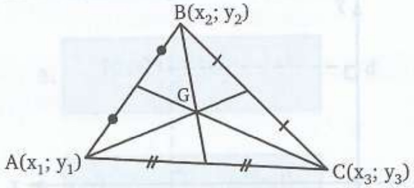


$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n} \qquad y = \frac{my_1 + ny_2}{m + n}$$

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

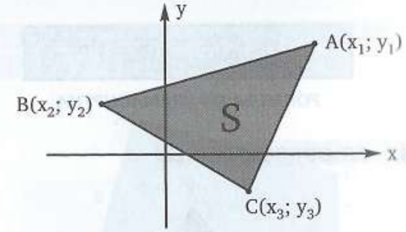
COORDENADAS DEL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO

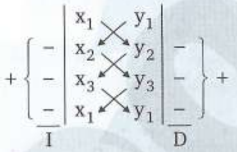


Sea: G(x; y)

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

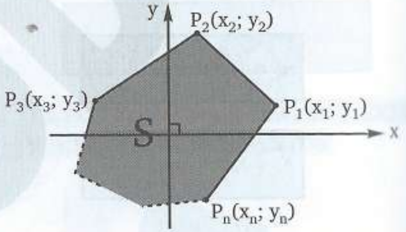
ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

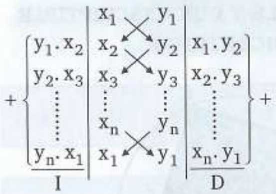




$$S = \frac{|D - I|}{2}$$

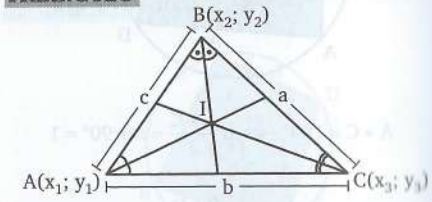
ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA





$$S = \frac{|D - I|}{2}$$

COORDENADAS DEL INCENTRO DE UN TRIÁNGULO

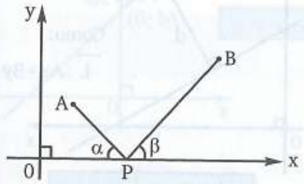


Sea: I(x; y)

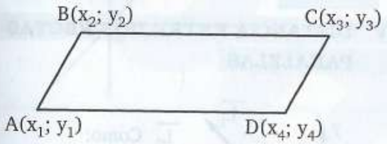
$$x = \frac{a(x_1) + b(x_2) + c(x_3)}{a + b + c} \qquad y = \frac{a(y_1) + b(y_2) + c(y_3)}{a + b + c}$$

PROPIEDADES:

i) Si (AP + PB) es mínimo se cumple si y solo si $\alpha = \beta$



ii) Paralelogramo

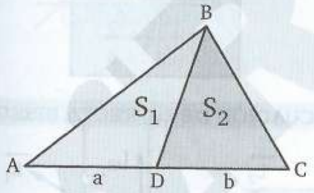


$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

⇨

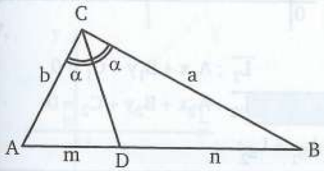
$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

iii) BD: Ceviana del Δ ABC



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

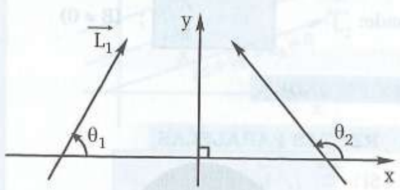
iv) CD: Bisectriz interior



$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

LA RECTA

ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE LA RECTA



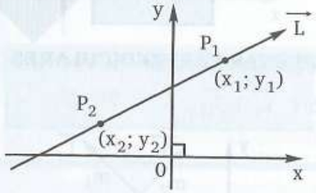
$0 \leq \theta_1 < 180°$

$0 \leq \theta_2 < 180°$

PENDIENTE DE UNA RECTA: (m)

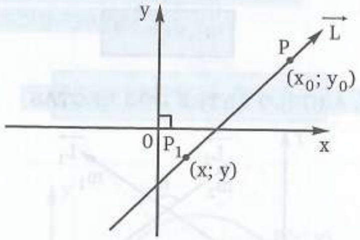
Se define: $m = \tan\theta$

POR PROPIEDAD



$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

I. ECUACIÓN DE LA RECTA



Donde:
m : Pendiente
$(x_0; y_0)$: Punto conocido
(x; y) : punto de paso ó punto móvil

$$\overrightarrow{L} : y - y_0 = m(x - x_0)$$

II ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

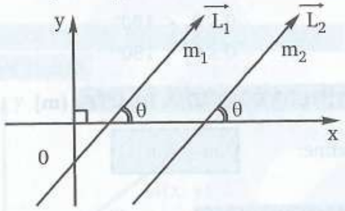
$$Ax + By + C = 0$$

Donde: $m = -\frac{A}{B}$; $(B \neq 0)$

PROPIEDADES

I. RECTAS PARALELAS

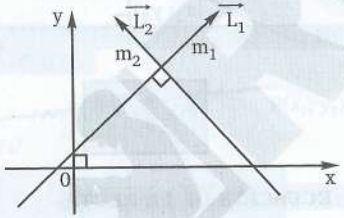
Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$



$$m_1 = m_2$$

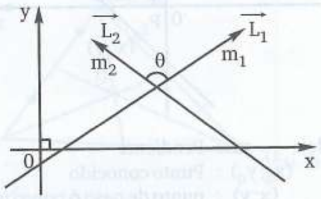
II. RECTAS PERPENDICULARES

Si: $\overrightarrow{L_1} \perp \overrightarrow{L_2}$



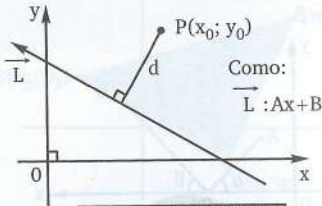
$$m_1 . m_2 = -1$$

III. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS



$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}\right|$$ θ: Ángulo agudo

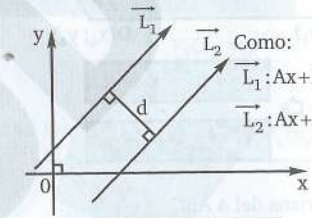
IV. DISTANCIA DE UN PUNTO A LA RECTA



Como:
$\overrightarrow{L}$: Ax+By+C=0

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

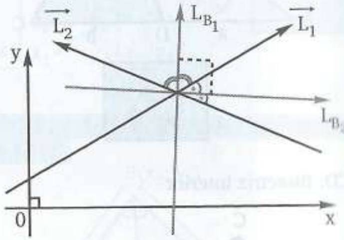
V. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS



Como:
$\overrightarrow{L_1}$: Ax+By+C_1=0
$\overrightarrow{L_2}$: Ax+By+C_2=0

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

VI. ECUACIÓN DE LA RECTA BISECTRIZ



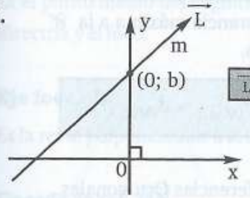
$\overrightarrow{L_1}$: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$\overrightarrow{L_2}$: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$L_{B_1} \wedge L_{B_2}$:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

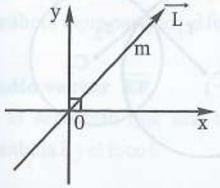
OBSERVACIÓN

I.



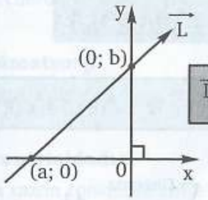
$\overrightarrow{L}$: y = mx + b

II.



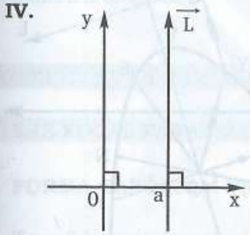
$\overrightarrow{L}$: y = mx

III.



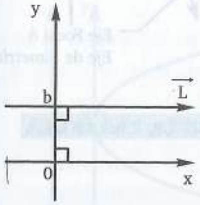
$\overrightarrow{L} : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

IV.



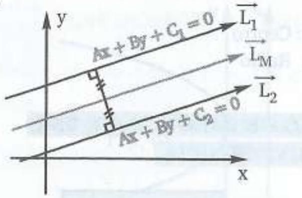
$\overrightarrow{L}$: x = a

V.



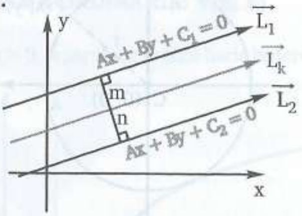
$\overrightarrow{L}$: y = b

VI.



$$\overrightarrow{L_M} : Ax + By + \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right) = 0$$

VII.

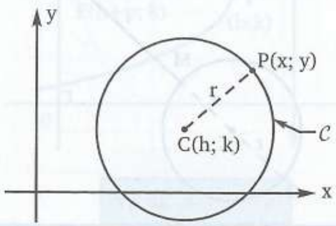


$$\overrightarrow{L_k} : Ax + By + \left(\frac{C_1 n + C_2 m}{m + n}\right) = 0$$

CIRCUNFERENCIA

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA

$$\mathcal{C}: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

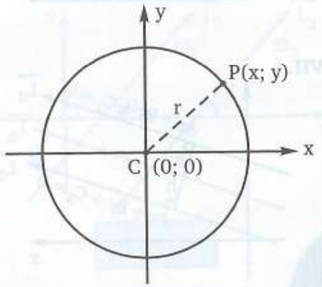


ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

- C : Centro
- r : Radio

ECUACIÓN CANÓNICA DE UNA CIRCUNFERENCIA

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = r^2$$



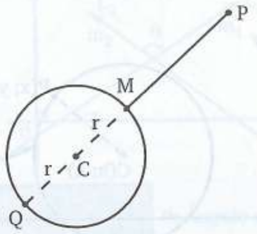
ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

$$C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

NOTA

1. $C:\left(-\dfrac{D}{2};-\dfrac{E}{2}\right)$; $r=\sqrt{\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}}$

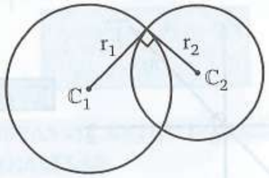
2. Distancia Máxima y Mínima a la Circunferencia.



$\overline{PM}$: Distancia mínima a la $\mathscr{C}$
$\overline{PQ}$: Distancia máxima a la $\mathscr{C}$
r: radio.

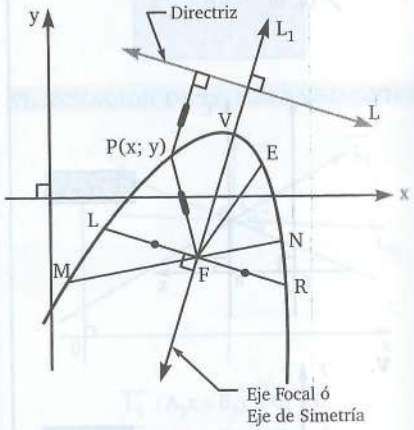
$$d_{(Máx.)} = d_{(Mín)} + 2r$$

3. Circunferencias Ortogonales.



PARÁBOLA

$$\mathcal{P} = \{P(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, d(P, L) = d(P, F)\}$$



ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

- **Foco "F"**
  Es el punto fijo de la parábola.

- **Vértice "V"**
  Es el punto medio del segmento que une la directriz y el foco.

- **Eje focal L_1**
  Es la recta perpendicular a la directriz L.

- **Cuerda focal $\overline{MN}$**
  Es el segmento que une dos puntos de la parábola y que pasa por el foco.

- **Radio vector $\overline{EF}$**
  Es el segmento que une un punto de la parábola E y el foco F.

- **Lado recto $\overline{LR}$**
  Es la cuerda focal perpendicular al eje focal.

- **Parámetro: p**
  Distancia dirigida del vértice al foco.

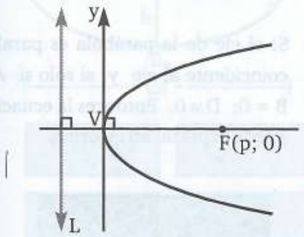
- **Excentricidad: e**
  Es la razón constante entre la distancia de un punto al foco y la distancia de dicho punto a la directriz.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

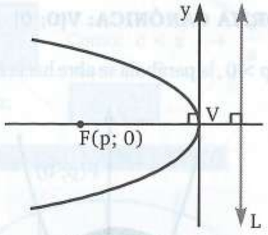
I. EJE FOCAL PARALELO AL EJE "x"

A) FORMA CANÓNICA: V(0; 0)

Si p > 0, la parábola se abre hacia la derecha.



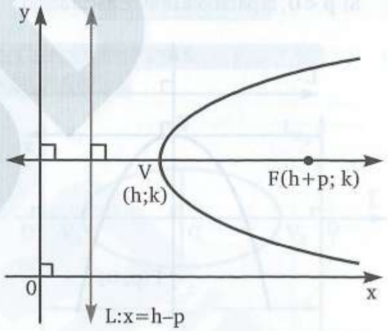
Si p < 0, la parábola se abre hacia la izquierda



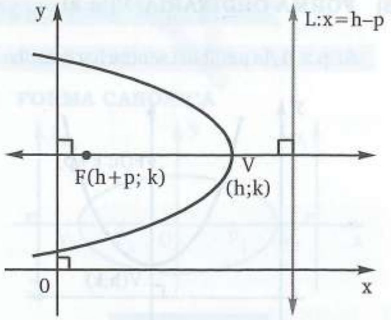
$$y^2 = 4px$$

B) FORMA ORDINARIA: V(h; k)

Si p > 0, la parábola se abre hacia la derecha.



Si p < 0, la parábola se abre hacia la izquierda

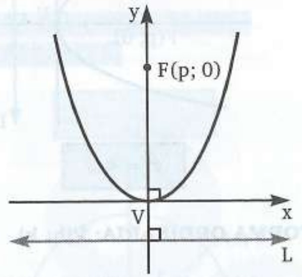


$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

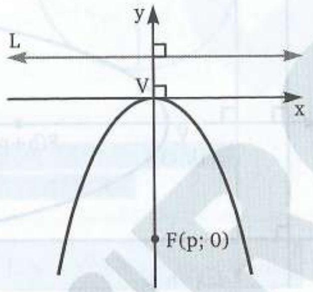
II. EJE FOCAL PARALELO AL EJE "y"

A) FORMA CANÓNICA: V(0; 0)

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba.



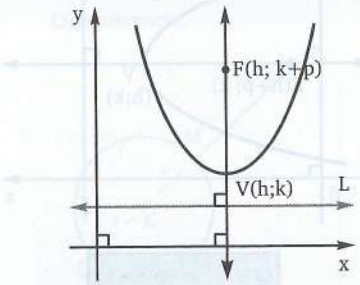
Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



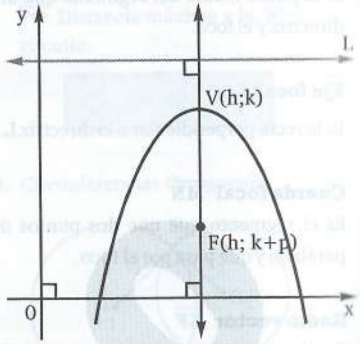
$$\boxed{x^2 = 4py}$$

B) FORMA ORDINARIA: V(h; k)

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba.



Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



$$\boxed{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$$

III. ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0}$$

La ecuación representa a una parábola si cumple las siguientes condiciones:

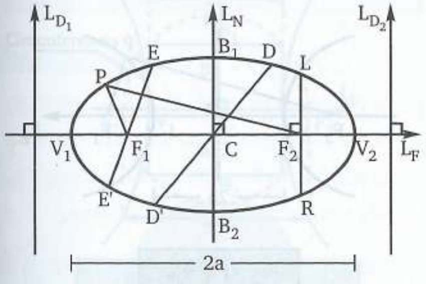
A) Si el eje de la parábola es paralelo ó coincidente al eje x, si solo si $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$. Entonces la ecuación se puede expresar en la forma.

$$\boxed{y^2 + ay + bx + c = 0}$$

B) Si el eje de la parábola es paralelo ó coincidente al eje y si solo si $A \neq 0$; $B = 0$; $D \neq 0$. Entonces la ecuación se puede expresar en la forma.

$$\boxed{x^2 + ax + by + c = 0}$$

LA ELIPSE

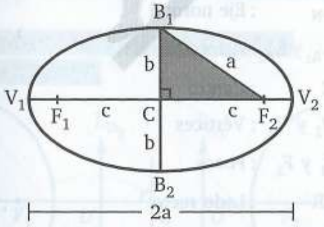


$$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$$

ELEMENTOS DE LA ELIPSE

L_{D_1} y L_{D_2} : Directrices
L_F : Eje focal
L_N : Eje normal
C : Centro
V_1 y V_2 : Vértices
F_1 y F_2 : Focos
LR : Lado recto
EE' : Cuerda focal
DD' : Diámetro
PF_1 PF_2 : Radio vector
V_1V_2 : Eje mayor
B_1B_2 : Eje menor
F_1F_2 : Segmento focal

RELACIONES FUNDAMENTALES



$$\boxed{V_1V_2 = 2a} \quad \boxed{F_1F_2 = 2c}$$

$$\boxed{B_1B_2 = 2b} \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

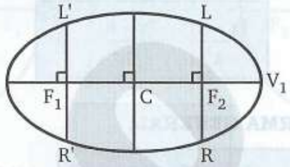
EXCENTRICIDAD

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Como: $c < a \rightarrow \frac{c}{a} < 1$

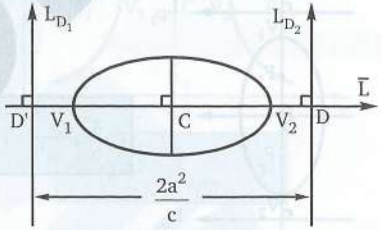
Luego: $\boxed{e < 1}$

LONGITUD DEL LADO RECTO



$$\boxed{LR = L'R' = \frac{2b^2}{a}}$$

DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS DIRECTRICES

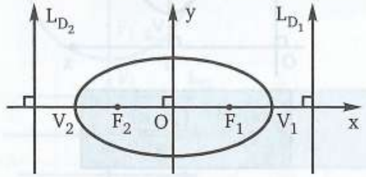


$$\boxed{DD' = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}}$$

ECUACIONES DE LA ELIPSE

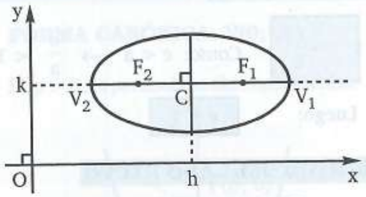
I. EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

A) FORMA CANÓNICA



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

B) FORMA ORDINARIA



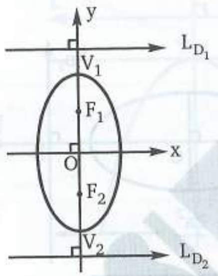
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

C) FORMA GENERAL:

$$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0 \quad (AC>0)$$

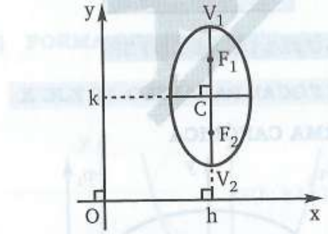
II. EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y

A) FORMA CANÓNICA



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

B) FORMA ORDINARIA

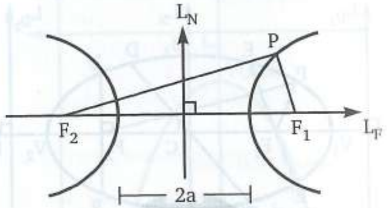


$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

C) FORMA GENERAL

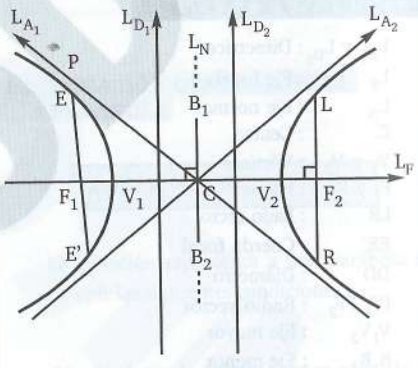
$$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0 \quad (AC>0)$$

LA HIPÉRBOLA



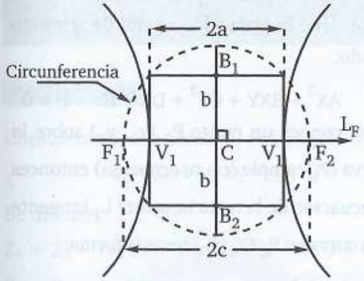
$$PF_2-PF_1=2a$$

ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA



L_{D_1} y L_{D_2} : Directrices
L_F : Eje focal
L_N : Eje normal
L_{A_1} y L_{A_2} : Asíntotas
C : Centro
V_1 y V_2 : Vértices
F_1 y F_2 : Focos
LR : Lado recto
EE' : Cuerda focal
V_1V_2 : Eje transverso
B_1B_2 : Eje conjugado
F_1F_2 : Segmento focal

RELACIONES FUNDAMENTALES



$$V_1V_2=2a \qquad F_1F_2=2c$$

$$B_1B_2=2b \qquad c^2=a^2+b^2$$

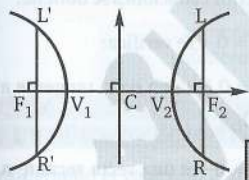
EXCENTRICIDAD

$$e=\frac{c}{a}$$

Como: $c>a \rightarrow \frac{c}{a}>1$

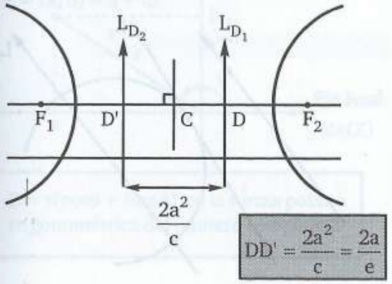
Luego: $e>1$

LONGITUD DEL LADO RECTO



$$LR=L'R'=\frac{2b^2}{a}$$

DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS DIRECTRICES

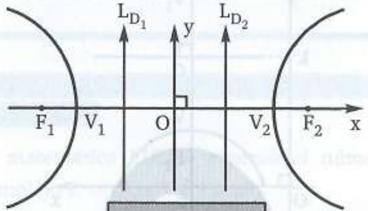


$$DD'=\frac{2a^2}{c}=\frac{2a}{e}$$

ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA

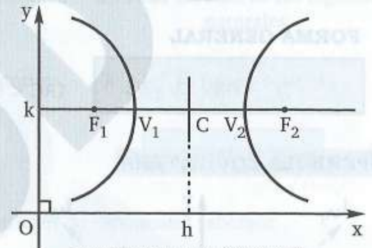
I. EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

A) FORMA CANÓNICA



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

B) FORMA ORDINARIA



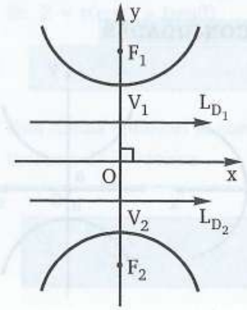
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

C) FORMA GENERAL:

$$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0 \quad (AC<0)$$

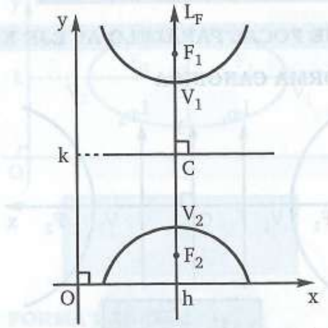
II. EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y

A) FORMA CANÓNICA



$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

B) FORMA ORDINARIA

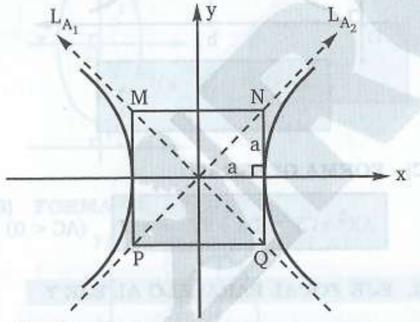


$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

C) FORMA GENERAL

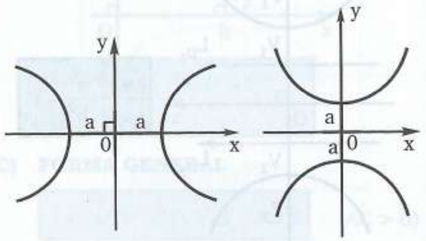
$$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0 \qquad (AC<0)$$

HIPÉRBOLA EQUILÁTERA



MNPQ: Cuadrado

HIPÉRBOLAS CONJUGADAS



RECTA TANGENTE A UNA CURVA

I. Si se tiene la ecuación general de segundo grado:

$$AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0$$

Si se conoce un punto $P_0\ (x_0;y_0)$ sobre la curva (P_0 cumple con su ecuación) entonces la ecuación de la recta tangente L_T tangente a la curva en $P_0\ (x_0;y_0)$ tiene la forma:

$$L_T: AX_0X+B\left(\frac{XY_0+YX_0}{2}\right)+CY_0Y+D\left(\frac{X+X_0}{2}\right)+E\left(\frac{Y+Y_0}{2}\right)+F=0$$

II. También:

Si tenemos la ecuación de la curva:

$$AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0$$

y la ecuación de la recta:

$$A_1X+B_1Y+C_1=0$$

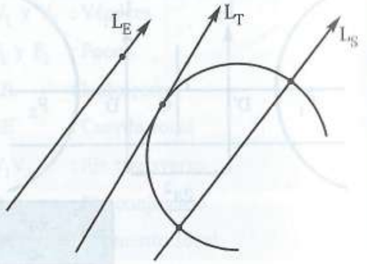
Al igualar las dos ecuaciones se obtiene:

$ax^2+bx+c=0$, y se verifica:

i) $b^2-4ac=0$ (es una recta tangente a la curva, L_T).

ii) $b^2-4ac>0$ (es una recta secante a la curva, L_S)

iii) $b^2-4ac<0$ (es una recta exterior a la curva, L_E)



NÚMEROS COMPLEJOS APLICADOS A LA TRIGONOMETRÍA

DEFINICIÓN

Considerando los números complejos

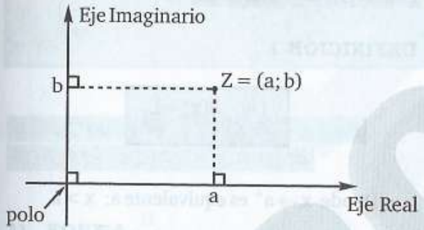
$$Z_1=(a;b) \wedge Z_2=(c;d)$$

Se definen:

$Z_1+Z_2=(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$

$Z_1\ .\ Z_2=(a;b)\ .\ (c;d)=(ac-bd;ad+bc)$

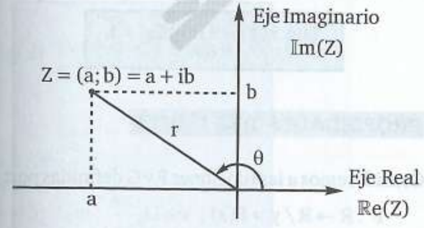
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS



Luego: $Z=(a;b)=\underbrace{a+ib}_{\text{Representación cartesiana de un número complejo}}$

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Considerando el complejo $Z=(a;b)\ /\ Z\neq 0$, tenemos:



$Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, es la forma polar o trigonométrica del número complejo Z

NOTA

La expresión $\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$ se puede escribir abreviadamente como $\operatorname{cis}\theta$, esta forma de abreviatura se lee como cis de θ.

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

El matemático EULER expresó al número complejo $Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$

Así: $$Z=r\,e^{i\theta}$$

Donde e = 2,71828 .... base de los logaritmos naturales

Entonces: $Z=\underbrace{re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}\ ....(*)$$

Por leyes de exponentes sabemos:

$$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$$

Luego usando (*) tenemos:

$$(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^n=\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta)$$

$n\in\mathbb{Z}$

Por lo tanto:

Si: $Z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$

$$Z^n=r^n(\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta))\ ;\ n\in\mathbb{Z}$$

Esta última igualdad se conoce como el teorema de D' Moivre

$$\operatorname{sen}Z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ ;\ \cos Z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

TEOREMA:

Sean Z_1 y Z_2 dos números completos cuyas formas polares son:

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$$

donde: $r_1 = |Z_1|;\ \theta_1 = \arg(Z_1)$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

donde: $r_2 = |Z_2|;\ \theta_2 = \arg(Z_2)$

Entonces:

1. $Z_1Z_2 = r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right]$

   donde: $\arg(Z_1Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$

2. $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\right]$

   donde: $\arg\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2)$

PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL COMPLEJA:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

- $|e^{i\theta}| = 1$
- $e^{i\theta}.\,e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $[e^{i\theta}]^n = e^{i\theta n};\ \forall\,\theta \in \mathbb{Z}$
- $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
- $e^Z \neq 0$
- Si: $Z = x + iy \Rightarrow |e^Z| = e^x \wedge \arg(e^Z) = y$
- $e^Z = 1 \Leftrightarrow Z = 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}$

LÍMITES Y DERIVADAS

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIÓN DE LÍMITE

$$\lim_{x\to a} F(x) = L$$

$$x\ \varepsilon\ D_F \wedge 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon$$

LÍMITES LATERALES

DEFINICIÓN 1

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = L_1$$

Donde $x \to a^+$ es equivalente a: $x > a$

DEFINICIÓN 2

$$\lim_{x\to a^-} F(x) = L_2$$

Donde $x \to a^-$ es equivalente a: $x < a$

TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^-} F(x) = L$$

PROPIEDADES DEL LÍMITE

Consideremos a las funciones F y G definidas por:

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x);\ x \in D_F$

$G: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = G(x);\ x \in D_G$

y la constante "k", tenemos:

1) $\lim\limits_{x\to a} k = k$

2) $\lim\limits_{x\to a}[F(x) \pm G(x)] = \lim\limits_{x\to a} F(x) \pm \lim\limits_{x\to a} G(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}[F(x)\ G(x)] = \lim\limits_{x\to a} F(x)\,.\,\lim\limits_{x\to a} G(x)$

4) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{F(x)}{G(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} F(x)}{\lim\limits_{x\to a} G(x)}$

5) $\lim\limits_{x\to a}\left[F(x)^{G(x)}\right] = \left[\lim\limits_{x\to a} F(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} G(x)}$

6) $\lim\limits_{x\to a}\left[\sqrt[G(x)]{F(x)}\right] = \sqrt[\lim\limits_{x\to a} G(x)]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

CÁLCULO DE LÍMITES PARA LAS FORMAS INDETERMINADAS

1) FORMA $\dfrac{0}{0}$

2) FORMA 1^∞

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right] = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan(x)}{x}\right] = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\mathrm{arcsen}(x)}{x}\right] = 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\arctan(x)}{x}\right] = 1$

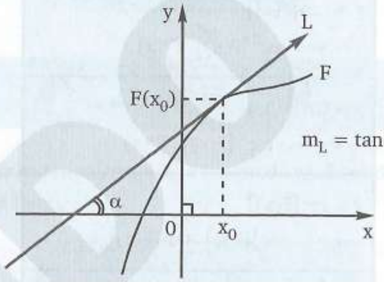
LA FUNCIÓN DERIVADA

DEFINICIÓN

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right]$$

Donde: $D_{F'} \subset D_F$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA



$$L:\ y - F(x_0) = F'(x_0)\,.\,(x - x_0)$$

TEOREMA

$$m = F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

DERIVADA PARA FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) $F(x) = k\ \ldots.\ (k = \text{c.te})$
   $\rightarrow F'(x) = 0$

2) $F(x) = x^n\ \ldots.\ (n \in Q)$
   $\rightarrow F'(x) = n\,.\,x^{n-1}$

3) $F(x) = G(x) \pm H(x)$
   $\rightarrow F'(x) = G'(x) \pm H'(x)$

4) $F(x) = [G(x)]^n\ \ldots.\ (n \in Q)$
   $\rightarrow F'(x) = n\,.\,[G(x)]^{n-1}\,.\,G'(x)$

5) $F(x) = G(x)\,.\,H(x)$
   $\rightarrow F'(x) = G'(x)\,.\,H(x) + G(x)\,.\,H'(x)$

6) $F(x) = \dfrac{G(x)}{H(x)}$
   $\rightarrow F'(x) = \dfrac{G'(x)\,.\,H(x) - G(x)\,.\,H'(x)}{[H(x)]^2}$

DERIVADA PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) $y = \text{sen}[F(x)]$
$\rightarrow y' = \cos[F(x)].\, F'(x)$

2) $y = \cos[F(x)]$
$\rightarrow y' = -\text{sen}[F(x)].\, F'(x)$

3) $y = \tan[F(x)]$
$\rightarrow y' = \sec^2[F(x)].\, F'(x)$

4) $y = \cot[F(x)]$
$\rightarrow y' = -\csc^2[F(x)].\, F'(x)$

5) $y = \sec[F(x)]$
$\rightarrow y' = \sec[F(x)].\, \tan[F(x)].\, F'(x)$

6) $y = \csc[F(x)]$
$\rightarrow y' = -\csc[F(x)].\, \cot[F(x)].\, F'(x)$

1) $y = \text{sen}\,x \rightarrow y' = \cos x$
2) $y = \cos x \rightarrow y' = -\text{sen}\,x$
3) $y = \tan x \rightarrow y' = \sec^2 x$
4) $y = \cot x \rightarrow y' = -\csc^2 x$
5) $y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \,.\, \tan x$
6) $y = \csc x \rightarrow y' = -\csc x \,.\, \cot x$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

1) EXTREMOS RELATIVOS (Máximos y Mínimos)

1.1) Si $F''(x_0) < 0$, entonces $F(x)$ es máximo en $x = x_0$

1.2) Si $F''(x_0) > 0$, entonces $F(x)$ es mínimo en $x = x_0$

2) CÁLCULO DE LÍMITES (L' Hospitall – Bernoulli)

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{G'(x)}}$$

Recordar la primera derivada:

$$y'; \ \frac{dy}{dx}; \ F'(x)$$

Luego para las funciones trigonométricas inversas:

$$\frac{d}{dx}(\text{arcsen}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arccos}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arctan}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arccot}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arcsec}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arccsc}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

u es una función diferenciable de x:

$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\sec u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\cos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\tan u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

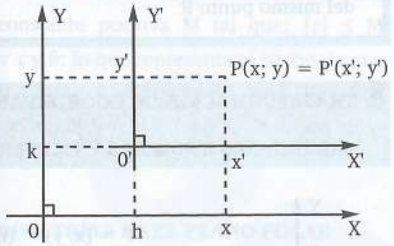
$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\cot u) = -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\sec u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc}\csc u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

TRASLACIÓN DE EJES



O': Nuevo origen (h; k)

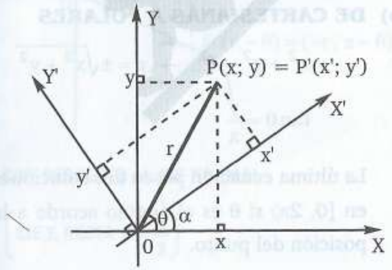
Del gráfico se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned}} \ \ldots\ldots \text{(I)}$$

En forma equivalente:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}} \ \ldots\ldots \text{(II)}$$

ROTACIÓN DE EJES



Donde:

α : ángulo de rotación
r : Radio vector
P(x; y) : Coordenadas de P en el sistema xy
P'(x'; y') : Coordenadas de P' en el sistema x'y'

Se cumple luego de una rotación de ejes:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\,\text{sen}\alpha \\ y' &= y\cos\alpha - x\,\text{sen}\alpha \end{aligned}}$$

En forma equivalente:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\alpha \\ y &= x'\,\text{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}}$$

ECUACIÓN COMPLETA DE 2° GRADO EN LAS VARIABLES x e y

La ecuación completa de segundo grado es de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Donde los coeficientes A, B y C no pueden ser igual a cero a la vez. Usando una rotación de ejes, se prueba que una ecuación de segundo grado con $B \neq 0$, puede reducirse a otra en donde $B = 0$.

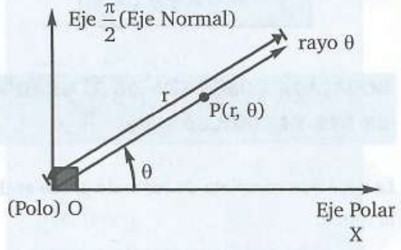
$$\boxed{\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B}}$$

RELACIÓN ENTRE COEFICIEN.	TIPO DE CÓNICA	CASOS EXCEPCIONALES
$B^2 - 4AC = 0$	Parábola	Dos rectas paralelas Dos rectas coincidentes Ningún lugar geométrico
$B^2 - 4AC < 0$	Elipse	Un punto Ningún lugar geométrico
$B^2 - 4AC > 0$	Hipérbola	Dos rectas que se cortan

COORDENADAS POLARES

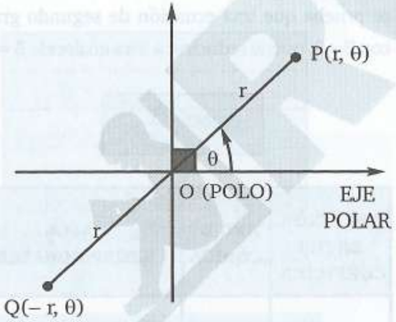
I. EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

1. POSICIÓN DE UN PUNTO EN COORDENADAS POLARES



La medida de θ está dado en radianes.

2. EXTENSIÓN DE LA REPRESENTACIÓN



$\begin{cases}\text{Si } \theta \text{ se mide en sentido antihorario. } \theta > 0. \\ \text{Si } \theta \text{ se mide en sentido horario. } \theta < 0.\end{cases}$

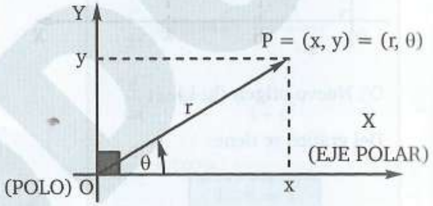
$\begin{cases}\text{Si P coincide con el extremo final del radio vector, } r > 0. \\ \text{Si Q está en la prolongación del radio vector, } r < 0 \text{ (es decir sobre el rayo } \theta + \pi)\end{cases}$

NOTA

$r = 0 \Leftrightarrow$ el punto es el polo.
El polo tiene coordenadas $(0, \theta), \theta \in \mathbb{R}$.

Si P (r, θ) es un punto, entonces $((-1)^n r, \theta + n\pi), n \in \mathbb{Z}$ también son coordenadas del mismo punto P.

II. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CARTESIANAS A POLARES Y VICEVERSA



a) DE POLARES A CARTESIANAS

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Estas ecuaciones son válidas para todo $r \in \mathbb{R}$, ya sea $r \geq 0 \vee r = 0$.

b) DE CARTESIANAS A POLARES

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

La última ecuación posee dos soluciones en [0, 2π⟩ si θ es el ángulo acorde a la posición del punto.

$$\Rightarrow r = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

Si θ se considera el otro valor

$$\Rightarrow r = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

III. GRÁFICAS EN COORDENADAS POLARES

1. EXTENSIÓN DE UNA GRÁFICA POLAR

La extensión está determinada por una constante positiva M tal que: $|r| \leq M$ $\forall$ r y θ; lo que representa el hecho de que la gráfica está encerrada dentro de una circunferencia de radio M centrada en el origen.

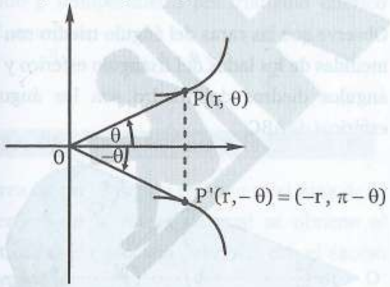
2. SIMETRÍAS EN EL PLANO POLAR

I) CON RESPECTO AL EJE POLAR (EJE X, RECTA θ = 0)

Ocurre cuando la ecuación obtenida no varía al reemplazar:

* (θ por –θ) o

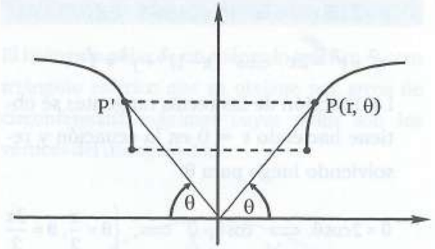
* ((r por –r) y (θ por π–θ)).



II) CON RESPECTO AL EJE NORMAL $\left(\text{EJE Y, RECTA } \theta = \frac{\pi}{2}\right)$

Ocurre cuando la ecuación obtenida no varía al reemplazar:

* (θ por π – θ) o * (r por – r y θ por – θ).

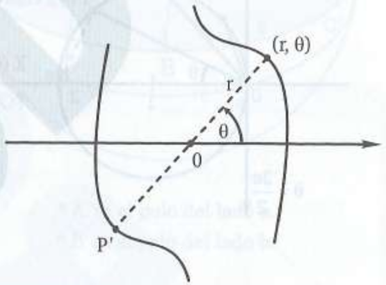


$P' = (r, \pi - \theta) = (-r, -\theta)$

III) CON RESPECTO AL POLO (ORIGEN)

Ocurre si la expresión de la ecuación no cambia cuando hacemos:

* θ por π+θ o * r por –r



$P' = (r, \pi + \theta) = (-r, \theta)$

NOTA

En los tres casos de simetría expuestos anteriormente, basta con que una de las dos condiciones en asterisco se cumpla para afirmar la simetría analizada.

3. RECTAS TANGENTES EN EL POLO

Son rectas que pasan por el origen, cuya forma general es: θ = θk constantes, las que se hallan haciendo r = 0 en la ecuación polar, como veremos más adelante, y resolviendo para θ. Por ejemplo, en la gráfica de:

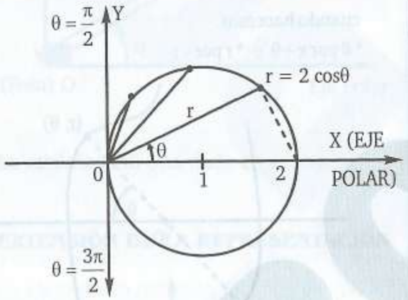
$$r = 2\cos\theta \iff r^2 = 2r\cos\theta \iff$$

$$x^2 + y^2 = 2x \iff (x-1)^2 + y^2 = 1$$

La dirección de las rectas tangentes se obtiene haciendo r = 0 en la ecuación y resolviendo luego para θ:

$$0 = 2\cos\theta \iff \cos\theta = 0 \iff \left\{\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}\right.$$

Estas dos últimas ecuaciones para θ representan a la misma recta: el eje normal Y.



4. INTERCEPTOS CON LOS EJES PRINCIPALES

a) CON EL EJE POLAR

Se hace $\theta = n\pi$, $n \in Z$ y se halla r.

b) CON EL EJE NORMAL

Se hace $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ y se halla r

c) CON EL POLO

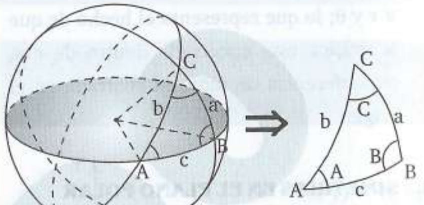
Se hace $r = 0$ y se halla algún $\theta \in \mathbb{R}$.

Con todo lo anterior, podemos graficar curvas que describen una ecuación polar.

TRIÁNGULO ESFÉRICO

DEFINICIÓN

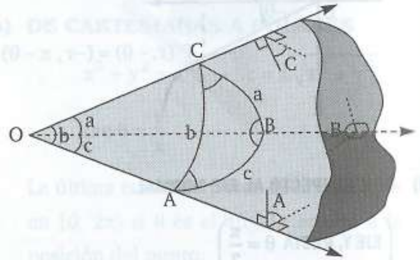
Es la región de la superficie de una esfera limitada por los arcos de tres circunferencias máximas, que se cortan dos a dos.



Los elementos de una triángulo esférico ABC son sus tres lados a, b, c (se miden en unidades angulares) y sus tres ángulos A, B y C

PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Observe que las caras del ángulo triedro son las medidas de los lados del triángulo esférico y los ángulos diedros del triedro son los ángulos esféricos de ABC.



* Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de éstos.

$$\boxed{b - c < a < b + c}$$

* La suma de los lados de un triángulo esférico es mayor que 0° y menor que 360°.

$$\boxed{0° < a + b + c < 360°}$$

* La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que 180° y menor que 540°

$$\boxed{180° < A + B + C < 540°}$$

EXCESO ESFÉRICO (E)

El exceso esférico de un triángulo esférico, denotado con la letra E, es el valor angular en el cual la suma de los ángulos del triángulo esférico excede a 180°.

$$\boxed{E = (A + B + C) - 180°}$$

Fórmula de L ' Huillier y Serret

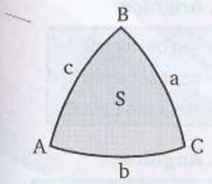
$$\boxed{\tan\frac{E}{4} = \sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\left(\frac{p-a}{2}\right)\tan\left(\frac{p-b}{2}\right)\tan\left(\frac{p-c}{2}\right)}}$$

Siendo p semiperímetro del triángulo esférico ABC, entonces:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO (S)

El área de un triángulo esférico es el área de la superficie de la esfera, el cual se obtiene al multiplicar el cuadrado del radio con el exceso esférico.



$$\boxed{S = R^2.E}$$

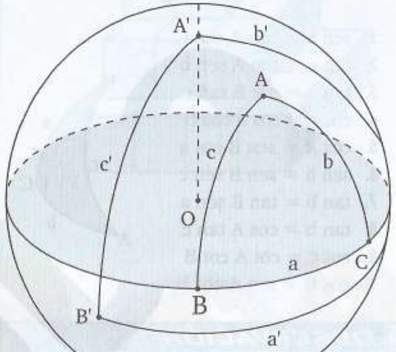
Siendo:

E: Exceso esférico expresado en radianes.

R: Radio de la esfera.

TRIÁNGULO POLAR O SUPLEMENTARIO

El triángulo polar de un triángulo esférico es otro triángulo esférico que se obtiene por arcos de circunferencia máximas cuyos polos son los vértices del triángulo dado.



* A' es el polo del lado a.

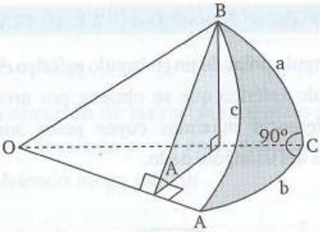
* B' es el polo del lado b.

RELACIÓN ENTRE LADOS Y ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO Y SU POLAR CORRESPONDIENTE

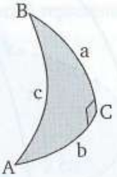
A = 180° – a'	A' = 180° – a
B = 180° – b'	B' = 180° – b
C = 180° – c'	C' = 180° – c

TRIÁNGULO ESFÉRICO RECTANGULAR (T E R)

Se llama un triángulo esférico rectángulo a un triángulo esférico tal que uno o más de sus ángulos sea recto. En el triángulo ABC recto en C, se cumplen las diez relaciones fundamentales siguientes:

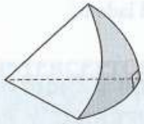


1. sen a = sen A sen C
2. tan a = tan A sen b
3. tan a = cos B tan c
4. cos c = cos a cos b
5. cos A = sen B cos a
6. sen b = sen B sen c
7. tan b = tan B sen a
8. tan b = cos A tan c
9. cos c = cot A cot B
10. cos B = sen A cos b

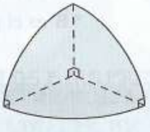


OBSERVACIÓN

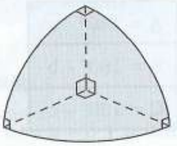
Un triángulo esférico rectángulo puede ser de uno, dos o tres ángulos rectos, veamos:



Triángulo
Rectángulo

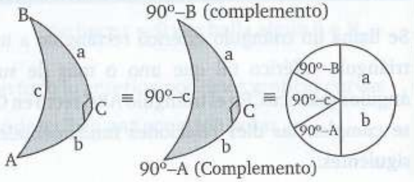


Triángulo
Birrectángulo



Triángulo
Trirrectángulo

REGLAS DE NEPER



REGLA 1:
El seno de cualquier elemento es igual al producto de las tangentes de los elementos adyacentes.

Ejemplo:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - A) = \tan(90^\circ - C).\ \tan b$$
$$\cos A = \cot c\ .\ \tan b$$

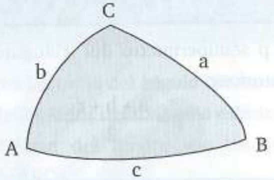
REGLA 2:
El seno de cualquier elemento es igual al producto de los cosenos de los elementos opuestos

Ejemplo:

$$\operatorname{sen} b = \cos(90^\circ - B).\ \cos(90^\circ - c)$$
$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B\ .\ \operatorname{sen} c$$

TRIÁNGULO ESFÉRICO OBLICUÁNGULO

Un triángulo esférico oblicuángulo es un triángulo esférico, tal que ninguno de sus ángulos son rectos, un triángulo esférico oblicuángulo está definido cuando se conocen tres elementos cualesquiera (excepto los casos de ambigüedad). Para resolver estos triángulos se estudian las siguientes leyes:



Ley de Senos

En todo triángulo esférico ABC se cumple:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}}$$

Ley de Cosenos para Ángulos

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

Ley de Cosenos para Ángulos

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$
$$\cos B = -\cos C \cos A + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$$