RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

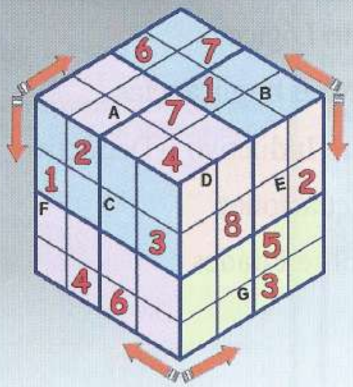
Resumen Teórico

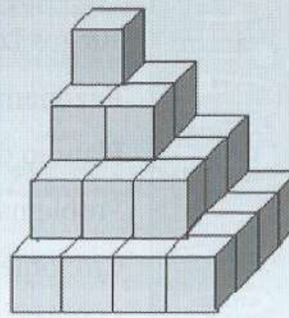
WaWa RM

+ EXÁMENES DE ADMISIÓN

FONDO EDITORIAL
RODO
Siempre Competitivo

Resumen Teórico





Razonamiento Matemático

FONDO EDITORIAL RODO

ÍNDICE

RESUMEN TEÓRICO DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

RAZONAMIENTO LÓGICO

PARENTESCOS

Son problemas que se generan por la relación de parentesco que existe entre los integrantes de una familia.

MÍNIMO NÚMERO DE PERSONAS

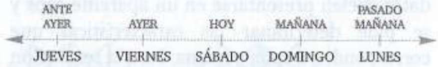
Son problemas en los cuales se tiene reunidos a los integrantes de una familia y al indicar quienes se encuentran presentes. El reto consiste en calcular el menor número de personas con el cual es posible contar a todos los integrantes que mencione el problema.

Se encuentran presentes: 2 padres, 2 hijos, 1 hija, 1 hermano, 1 hermana, 1 abuelo y 1 nieto.

Sin embargo son sólo 4 personas.

TIEMPOS DIARIOS Y DÍAS DE LA SEMANA

Son problemas en los cuales se establece una relación entre los tiempos diarios (hoy, ayer, mañana, etc.) y los días de la semana (lunes, martes, miércoles, etc.).



OBSERVACIÓN

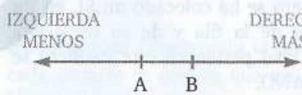
Equivalencias a tener en cuenta:

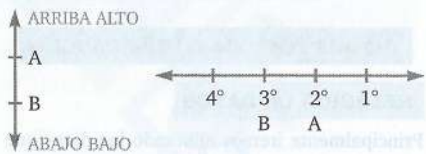
- Hace 1 día ó 1 día antes = – 1
- Hace 2 días ó 2 días antes = – 2
- Hace 3 días ó 3 días antes = – 3

- Dentro de 1 día ó 1 día después = + 1
- Dentro de 2 días ó 2 días después = + 2
- Dentro de 3 días ó 3 días después = + 3

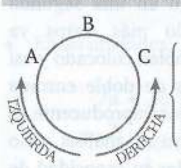
ORDENAMIENTOS

- **ORDENAMIENTO LINEAL**

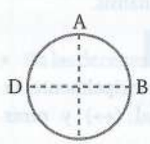




- **ORDENAMIENTO CIRCULAR**



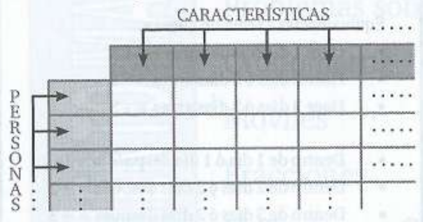
A está a la izquierda de B
B está a la izquierda de C
B está a la derecha de A
C está a la derecha de B



– A está frente a C o C frente a A
– B está frente a D o D frente a B

TOMA DE DECISIONES

Son problemas en los cuales un grupo de personas tienen ciertas características: profesiones u oficios, lugares donde viven, estudios, aficiones, nacionalidades, etc. Los datos suelen presentarse en un aparente caos y se pide determinar las características que corresponden a cada persona. Para la resolución de este tipo de problema se sugiere el uso de tablas como la que mostramos a continuación.



Para completar la tabla debemos tener en cuenta lo siguiente:
Si en una fila o columna en todos los casilleros menos uno se ha colocado un NO, en el casillero que falta se debe colocar un SI.
Si en un casillero se ha colocado un SI, en los otros casilleros de la fila y de su respectiva columna a la cual pertenece este casillero se debe colocar un NO.

JUEGOS LÓGICOS E IMPLICANCIAS

RELACIÓN DE DATOS

Principalmente iremos anotando los datos que se puedan obtener directamente de una primera lectura del problema, luego en una segunda lectura se irán colocando más datos ya razonándolos con los que habían colocado y así sucesivamente. Los cuadros de doble entrada facilitan la lectura pero lo contraproducente es que esquematiza y mecaniza el análisis y no permite al alumno desarrollar su capacidad de interrelación, concentración y análisis.

IMPLICANCIAS LÓGICAS

En este tema se analizará principalmente la condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) y otras formas lógicas de conectividad.

¡Importante!
Considerar que una condicional ($\rightarrow$) se lee de izquierda a derecha, si se afirma el antecedente se afirma el consecuente pero no lo contrario.

ESTRUCTURA LÓGICA EQUIVALENTE DE $A \rightarrow B$

$$\boxed{\sim B \rightarrow \sim A}$$

PRINCIPIO DE SUPOSICIÓN

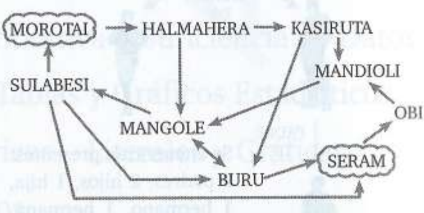
En éste tema hay dos criterios muy interesantes para su enfoque y desarrollo.
El primero es buscar dos premisas (datos) que se contradigan entre sí y partiendo de ellos, asumir o suponer las veracidades correspondientes dando un valor de verdad.
El segundo criterio, es de suponer en todo el problema la veracidad supuesta, e ir colocando el valor de verdad para cada enunciado según corresponda en las condiciones del problema.

REDES

En éste tema se tratará de relacionar cada par de puntos por:

$A \rightarrow B$: solo se va de A a B
$A \leftarrow B$: solo de B a A
$A \leftrightarrow B$: en cualquier sentido

Tener en cuenta el principio del buen orden para no confundir los recorridos.



Para visitar la máxima cantidad de islas debe pasar por una ruta larga, la más larga posible.
En este ejemplo si queremos ir de Morotai a Seram debemos realizar el recorrido:
Morotari – Halmaera – Kasiruta – Mandioli – Mangole – Sulabesi – Buru – Seram

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

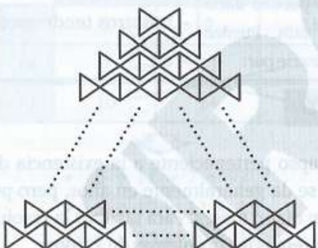
CONCEPTO

Es aquel proceso que a partir de la observación de experiencias con características similares (premisas particulares) podemos sacar una conclusión (premisa general), **la cual es muy probable que sea cierta.** Veamos ahora los siguientes ejemplos:

$$15^2 = 225$$
$$35^2 = 1225$$
$$75^2 = 5625$$
$$155^2 = 24025$$
$$205^2 = 42025$$
$$\vdots$$

A partir de esto podemos llegar a la conclusión que todos los números que terminan en 5 al ser elevados al cuadrado tienen un resultado que termina en 25.

$$\boxed{(\ldots 5)^2 = \ldots\ldots 25}$$



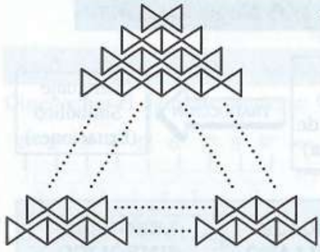
1 2 3 .... 28 29 30

Analicemos los resultados obtenidos en cada caso para encontrar una secuencia que nos permita encontrar el resultado en toda la figura.

1 } Número de triángulos $= 2 = 1 \times 2$

1 2 } Número de triángulos $= 6 = 2 \times 3$

1 2 3 } Número de triángulos $= 12 = 3 \times 4$



1 2 3 .... 28 29 30

Número de triángulos $\left.\right\}$ $30 \times 31 = 930$

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

CONCEPTO

Es aquel proceso que a partir de una o más informaciones (premisas) se extrae una nueva información (conclusión) **la cual es necesariamente correcta.**

Ejemplo: Calcular $(a + b)$ si:

$$\overline{1a} + \overline{2a} + \overline{3a} + \ldots + \overline{7a} = \overline{bb6}$$

Resolución: Observando la primera cifra de cada número se deduce que son 7 sumandos, luego ordenando en columna se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{1a}\ + \\ \overline{2a} \\ \vdots \\ \overline{7a} \end{array}\right\} \text{Son 7 sumandos}$$
$$\overline{bb6}$$

- En las unidades: $\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{7 \text{ veces}} = \ldots 6$

$$\left.\begin{array}{c} 7a = \ldots 6 \\ \downarrow \\ 7 \times 8 = 56 \end{array}\right\} a = 8$$

$\downarrow$ Llevamos 5 a la siguiente columna

- En las decenas: $5 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 7 = \overline{bb}$

$\downarrow$ Lo que llevamos de las unidades

$$33 = \overline{bb}$$
$$b = 3$$

$$\therefore a + b = 8 + 3 = 11$$

PLANTEO DE ECUACIONES

Lenguaje Castellano (Enunciado de un problema)	TRADUCCIÓN →	Lenguaje Simbólico (Ecuaciones)

	LENGUAJE CASTELLANO	LENGUAJE SIMBÓLICO
1	"A" tiene S/.5 más que "B" "A" excede a "B" en S/.5	$A = B + 5$; $A - B = 5$; $\underbrace{A}_{S/.x+5}$ $\underbrace{B}_{S/.x}$
2	"A" tiene S/.5 menos que "B" "A" es excedido por "B" en S/.5	$A = B - 5$; $B - A = 5$; $\underbrace{A}_{S/.x-5}$ $\underbrace{B}_{S/.x}$
3	El exceso de "x" sobre "y" es 15	$x - y = 15$
4	El triple de un número, disminuido en 5	Sea "x" el número: $3x - 5$
5	El triple, de un número disminuido en 5	Sea "x" el número: $3(x - 5)$
6	Tengo tantos litros como cuadernos	$\underbrace{\#\text{Libros}}_{x}$ $\underbrace{\#\text{Cuadernos}}_{x}$
7	En una reunión hay tantos hombres como el doble de mujeres	#Hombres=2(#Mujeres); Hombres : 2x Mujeres : x
8	Por cada manzana tenga 3 naranjas	$\underbrace{\#\text{ Manzanas}}_{x}$ $\underbrace{\#\text{ Naranjas}}_{3x}$
9	El cuadrado de la suma de 2 números es mayor que 8 pero menor que 15	Sea x e y los números: $8 < (x + y)^2 < 15$
10	Tengo doble cantidad de hermanos que de hermanas	$\underbrace{\#\text{ Hermanos}}_{2x}$ $\underbrace{\#\text{ Hermanas}}_{x}$

PROBLEMAS SOBRE EDADES

TIEMPOS

TIEMPOS	EXPRESIONES
Tiempo Presente: Existe un único presente. Se le identifica por las expresiones:	– tengo .... – mi edad actual es .... – tienes .... – tenemos .... – hoy la edad ....
Tiempo Pasado: Puede darse en el problema uno o más tiempos, se reconocen por:	– hace 8 años .... – tenías .... – cuando yo tenía .... – etc.
Tiempo Futuro: Al igual que el tiempo pasado pueden darse uno o más. Pueden identificarse por:	– dentro de .... – tú tendrás .... – nosotros tendremos .... – etc.

EDAD

Es un lapso perteneciente a la existencia de un sujeto, se da generalmente en años, pero puede darse en días o meses. Para facilitar la resolución clasificaremos los problemas en 2 tipos:

TIPO I: Cuando interviene la edad de un sólo sujeto.

Ejemplo: Hoy tengo 20 años ¿podría decir que edad tenía hace 5 años y cuántos años cumpliré dentro de 13 años?

TIPO II: Cuando intervienen las edades de dos o más sujetos

Ejemplo:

Hace 5 años Pedro tenía el doble de la edad que tenía Juan. ¿Cuál es la edad actual de Juan si se sabe que dentro de 5 años se cumplirá que la edad de Juan será los 3/5 de la que tenga Pedro?

Resolución:

	Hace 5 años	Hoy	Dentro de 5 años
Juan	x	x + 5	x + 10
Pedro	2x	2x + 5	2x + 10

OBSERVACIÓN

Supongamos que la edad de tres personas en los tres tiempos sean los siguientes:

– 4 años + 6 años

SUJETOS	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Yo	5	9	15
Tú	7	11	17
Él	10	14	20

- 5 + 11 = 7 + 97
- 9 + 17 = 11 + 15
- 7 + 20 = 10 + 17

Criterio del aspa: La suma en aspa de valores colocados simétricamente nos da un mismo resultado.

OBSERVACIÓN

$\boxed{\text{Año Nacimiento}} + \boxed{\text{Edad Actual}} =$

Año Actual ; si la persona ya cumplió años.

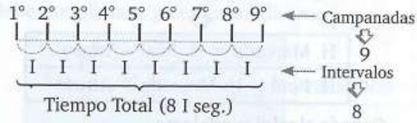
$\boxed{\text{Año Nacimiento}} + \boxed{\text{Edad Actual}} =$

Año Actual – 1; si la personas aún no cumple años.

CRONOMETRÍA

PROBLEMAS SOBRE CAMPANADAS

Observemos el siguiente esquema:



∴ $\boxed{\text{\# Campanadas = \# Intervalos + 1}}$

$\boxed{\text{T. Total = \# Intervalos} \times \text{Valor de c/Intervalo}}$

OBSERVACIÓN

Utilizando Regla de 3

8c → 21s

xc → 33s

Al aplicar Regla de 3. Se debe trabajar con los intervalos.

7 → 21

x – 1 → 33

$x - 1 = \frac{33.7}{21}$

$x - 1 = 11$

$\therefore\ x = 12$

PROBLEMAS SOBRE TIEMPO TRANSCURRIDO Y TIEMPO POR TRANSCURRIR

Para este tipo de problemas emplear de manera práctica, el siguiente esquema:

OBSERVACIÓN

No siempre se va trabajar sobre un día puede ser la hora, el año, el mes, etc.

PROBLEMAS SOBRE ADELANTOS Y ATRASOS

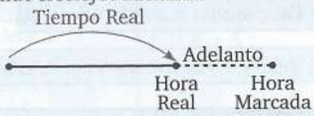
Debemos tener presente, que para hallar el número de minutos acumulados en el atraso o adelanto se aplicará una regla de tres simple y tener presente el siguiente esquema:

RAZ MATEM

- Cuando el reloj se atrasa:

H. Marcada = H. Real – Atraso
H. Real = H. Marcada + Atraso

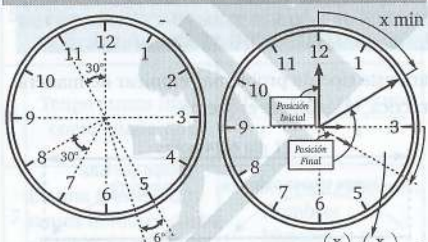
- Cuando el reloj se adelanta:



H. Marcada = H. Real + Adelanto
H. Real = H. Marcada – Adelanto

Importante:
También debemos tener en cuenta que para que un reloj vuelva a marcar la hora correctamente éste debe adelantarse o atrasarse como máximo 12h ó 720'

RELACIÓN ENTRE LA HORA Y EL ÁNGULO FORMADO POR MANECILLAS DEL RELOJ



$\left(\frac{x}{2}\right)$ ó $\left(\frac{x}{12}\right)$ min

1 división <> 1 minuto <> 6°

Además: Recorrido del minutero — Recorrido del horario

(en minutos)		(en grados)
60 min	→	30°
30 min	→	15°
15 min	→	7,5°
⋮		⋮

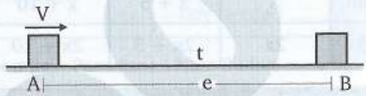
En general: $\boxed{x \text{ min} \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{\circ}}$

MÓVILES

Este capítulo trata del estudio del movimiento de los cuerpos, y de sus características fundamentales como son: el espacio, el tiempo y la velocidad.

ECUACIÓN FUNDAMENTAL

Dado un cuerpo que se mueve desde un punto "A" hasta "B", como indica la figura.



Se cumple:

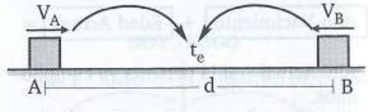
$\boxed{V = \frac{e}{t}}$ $\boxed{e = V.t}$ $\boxed{t = \frac{e}{V}}$

Donde:
e: espacio. t: tiempo. V: velocidad

OBSERVACIONES

* Es importente verificar que todas las variables tengan unidades iguales.
* La velocidad también se expresa en Kilometro por hora (Km/h); donde:
  1 Km/h = 18/5 m/s

TIEMPO DE ENCUENTRO (t_e):
Se refiere al tiempo que demoran dos móviles en encontrarse, viajando en sentidos contrarios. Así dados dos móviles que se mueven en sentidos contrarios, como indica la figura:



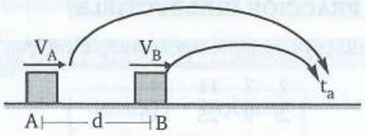
Para calcular después de cuánto tiempo se encuentran, se aplica la siguiente fórmula:

$$t_e = \frac{d}{V_A + V_B}$$

Donde:
d: distancia de separación.
V_A, V_B: velocidades

TIEMPO DE ALCANCE (t_a):

Se refiere al tiempo que demoran un móvil en alcanzar a otro que se mueve en el mismo sentido, como indica la figura:



Para calcular después de qué tiempo, uno alcanza al otro, se aplica la siguiente fórmula:

$$\boxed{t_a = \frac{d}{V_A - V_B}}$$

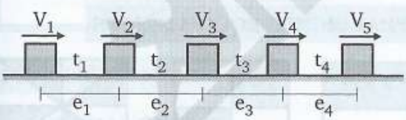
Donde:
d: distancia de separación.
V_A, V_B: velocidades

OBSERVACIÓN

$V_A > V_B$ para que pueda alcanzarlo.

VELOCIDAD PROMEDIO (V_P)

Cuando un móvil cambia de velocidad con el tiempo; se desea conocer la velocidad que reemplace a todas las anteriores, y que desarrolle el mismo espacio en el mismo tiempo, esta velocidad es llamada "Velocidad Promedio" y se calcula como la razón entre el espacio total y el tiempo total empleados.



Luego, la velocidad promedio se calcula así:

$$\boxed{V_p = \frac{e_T}{T_T} = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + \ldots}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots}}$$

CRITERIOS

PARA TRENES: Se utiliza la ecuación fundamental del movimiento.

PARA CORRIENTES: Considerar **sumar** las velocidades del barco y la corriente, cuando este va a favor, caso contrario **restar** dichas velocidades.

FRACCIONES

CONCEPTO

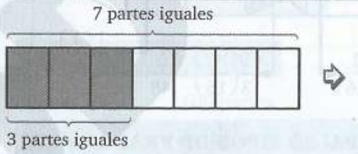
Para que una fracción sea considerada como tal debe cumplir las siguientes condiciones:

$$f = \frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{NUMERADOR} \\ \leftarrow \text{DENOMINADOR} \end{matrix} \Big] \text{ TÉRMINOS}$$

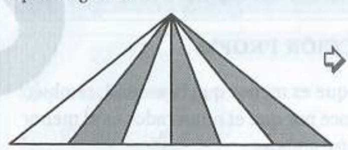
Donde: a y b $\in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$A \neq \overset{o}{b}$; es decir el cociente de la división no debe ser exacta.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FRACCIÓN



$\Rightarrow f = \frac{3}{7}$



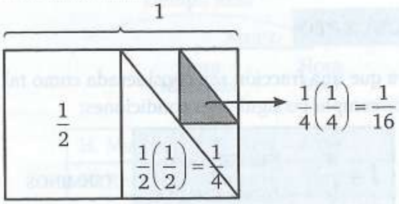
$\Rightarrow f = \frac{3}{6}$

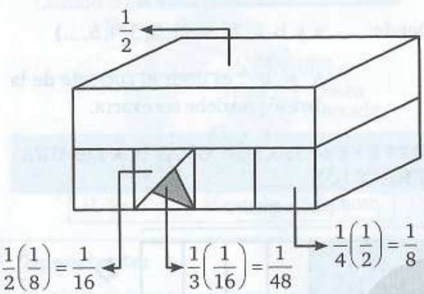
OPERACIONES CON FRACCIONES

- $\frac{x}{y} + \frac{a}{b} = \frac{xb + ay}{yb}$ • $\frac{2}{3} \div \left(\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{6} = \frac{14}{18}$
- $\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{xb - ya}{yb}$ • $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{3}} = \frac{1 \times 3}{2 \times 7} = \frac{3}{14}$
- $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{9}{7} = \frac{35 \times 2 + 21 \times 1 + 15 \times 9}{105} = \frac{226}{105}$

  MCM: 105
- $\frac{2}{3} \times \frac{9}{7} = \frac{2 \times 9}{3 \times 7}$ • $3\frac{1}{2} = \frac{3 \times 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$

FRACCIÓN DE FRACCIÓN





PRINCIPALES TIPOS DE FRACCIONES

I. FRACCIÓN PROPIA

Es aquella que es menor que la unidad, también se le reconoce por que el numerador es el menor término entre ambos.

$$\frac{1}{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{1111}{3333};\ \frac{2+m}{11+m};\ \frac{m^2+10}{m^3+12};\ ....(m \in \mathbb{N})$$

II. FRACCIÓN IMPROPIA

Es aquella que es mayor que la unidad, también se le reconoce por que el denominador es ahora el menor término (caso inverso al anterior).

$$\frac{3}{2};\ \frac{11}{7};\ \frac{9}{5};\ \frac{111}{75};\ \frac{9999}{222};\ \frac{m^2+10}{m^2+3};\ \frac{77^2}{5^3}$$

Además se cumple:

$$\boxed{\text{F. IMPROPIA} > \text{F. PROPIA}}$$

III. FRACCIÓN REDUCTIBLE

Aquella cuyos términos tienen factores comunes diferentes a la unidad.

$$\frac{\overbrace{12}^{③\times 4}}{\underbrace{18}_{③\times 6}};\ \frac{\overbrace{15}^{⑤\times 3}}{\underbrace{10}_{⑤\times 2}};\ \frac{21}{14};\ \frac{999}{888};\ \frac{39}{27};\ ....$$

IV. FRACCIÓN IRREDUCTIBLE

Aquella cuyos términos no son simplificables.

$$\frac{2}{3};\ \frac{7}{9};\ \frac{11}{25};\ \frac{244}{115};\ ....$$

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

- ¿Qué fracción es mayor?

$$A=\frac{2}{3} \qquad B=\frac{3}{5}$$

1.ª forma (Homogenizando)

$$\underbrace{\frac{2\times 5}{3\times 5}}_{\frac{10}{15}} \qquad \underbrace{\frac{3\times 3}{5\times 3}}_{\frac{9}{15}}$$

$$\frac{10}{15} > \frac{9}{15}$$

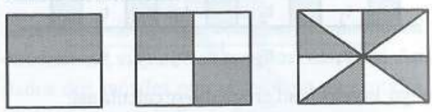
Rpta: A

2.ª forma (Multiplicación cruzada)

$$\overbrace{\frac{2}{3}}^{10} \quad > \quad \overbrace{\frac{3}{5}}^{9}$$

Rpta: A

FRACCIONES EQUIVALENTES



$$\underbrace{\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{4} \qquad \frac{4}{8}}_{\text{Fracciones equivalentes de } \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} <> \frac{2}{4} <> \frac{3}{6} <> .... <> \underbrace{\frac{1\times k}{2\times k}}$$

×2, ×3

Fracción equivalente generalizada de $\frac{1}{2}$

En forma general:

$$\boxed{\frac{a}{b}} <> \boxed{\frac{ak}{bk}} \; : \; k = 1;\, 2;\, 3;4;\, ...\,;$$

Fracción Irreductible — Fracción Equivalente

OBSERVACIÓN

PIERDO		QUEDA
$\frac{1}{2}$	....	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	....	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{x}$	....	$\frac{x-1}{x}$
$\frac{a}{b}$	....	$\frac{b-a}{b}$
$\frac{x}{10}$	....	$\frac{10-x}{10}$

GANO		TENGO
$\frac{1}{2}$	....	$\frac{3}{2}$
$\frac{2}{3}$	....	$\frac{5}{3}$
$\frac{1}{x}$	....	$\frac{x+1}{x}$
$\frac{a}{b}$	....	$\frac{a+b}{11}$
$\frac{x}{10}$	....	$\frac{10+x}{10}$

FRACCIÓN GENERATRIZ

- **DECIMAL EXACTO**

$$0,\overline{abc} = \frac{\overline{abc}}{1000}$$

- **DECIMAL PERIÓDICO PURO**

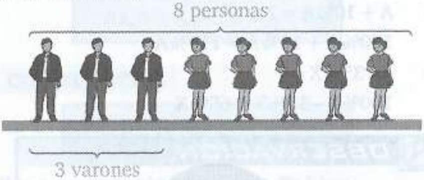
$$0,\widehat{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$$

- **DECIMAL PERIÓDICO MIXTO**

$$0,m\widehat{ab} = \frac{\overline{mab}-m}{990}$$

EL TANTO POR CUANTO

CONCEPTO

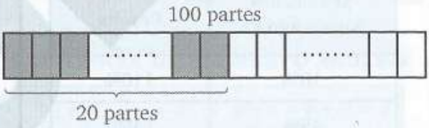


$$\text{"3 de cada 8"} = \left.\frac{3}{8}\right\} \text{El 3 por 8} = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{\text{El "m" por "n"} = \frac{m}{n}}$$

↓ tanto ↓ cuanto

EL TANTO POR CIENTO



Lo que está representado es:

- $\text{El } 20 \text{ por } \underbrace{100} = \frac{20}{100}$
- $\text{El } 20 \underbrace{\text{ por ciento}}_{\%} = \frac{20}{100}$
- $\text{El } 20\% = \frac{20}{100}$

$$\boxed{\text{El } a\% = \frac{a}{100}}$$

EQUIVALENCIAS

- $10\% = \frac{1}{10}$
- $20\% = \frac{1}{5}$
- $25\% = \frac{1}{4}$
- $33,3\% = \frac{1}{3}$
- $50\% = \frac{1}{2}$
- $66,6\% = \frac{2}{3}$
- $75\% = \frac{3}{4}$
- $100\% = 1$
- $125\% = \frac{5}{4}$
- $150\% = \frac{3}{2}$

OPERACIONES

- $15\%\,N + 60\%\,N = 75\%\,N$
- $80\%P - 25\%P = 55\%P$
- $A + 10\%A = ?$

  $100\%A + 10\%A = 110\%A$
- $X - 35\%X = ?$

  $100\%X - 35\%X = 65\%X$

OBSERVACIÓN

Si pierdo, gasto o saco	Me queda
15%	85%
60%	40%
x%	(100 – x)%

Si aumento gano o agrego	Resulta
10%	110%
45%	145%
x%	(100 + x)%

APLICACIONES DEL TANTO POR CIENTO

DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

- ¿A qué descuento único equivalen 2 descuentos sucesivos de 10% y 20%?

Inicial — Queda al final

$$N = 100\% \xrightarrow{-10\%} 90\%N \xrightarrow{-20\%} 80\%(90\%N) = 72\%$$

$$Du = 100\% - 72\% \qquad Du = 28\%$$

- ¿A qué aumento único equivalen 2 aumentos sucesivos del 20% y 30%?

Inicial — Queda al final

$$N = 100\% \xrightarrow{+20\%} 120\%N \xrightarrow{+30\%} 130\%(120\%N) = 156\%$$

$$Au = 156\% - 100\% \qquad Au = 56\%$$

OBSERVACIÓN

- Para 2 descuentos sucesivos de a% y b%

$$Du = \left(a + b - \frac{a \times b}{100}\right)\%$$

Ejemplo: Para 2 descuentos sucesivos de 10% y 20%

$$Du = \left(10 + 20 - \frac{10 \times 20}{100}\right)\% = 28\%$$

- Para 2 aumentos sucesivos de a% y b%

$$Au = \left(a + b + \frac{a \times b}{100}\right)\%$$

Ejemplo: Para 2 aumentos sucesivos de 20% y 30%

$$Au = \left(20 + 20 + \frac{20 \times 30}{100}\right)\% = 56\%$$

VARIACIÓN PORCENTUAL

Toda cantidad antes de sufrir una variación representa un 100%

- $100\% <> 100 \longrightarrow 60$

  Cantidad Inicial — Cantidad Final

  Hay una disminución de 40

- Cantidad Inicial: 12 — Cantidad Final: 9

  Hay una disminución de 3 $\rightarrow \dfrac{3}{12} \times 100\% = 25\%$

- Cantidad Inicial: 150 — Cantidad Final: 200

  Hay un aumento de 50 $\rightarrow \dfrac{50}{150} \times 100\% = 33,\hat{3}\%$

OPERACIONES MATEMÁTICAS

NOCIÓN DE OPERACIÓN MATEMÁTICA

Es un proceso que transforma una o más cantidades en otras (resultado) mediante ciertas reglas llamadas regla de definición.

OPERACIÓN	OPERADOR	RESULTADO
ADICIÓN	$+$	SUMA
SUSTRACCIÓN	$-$	DIFERENCIA
MULTIPLICACIÓN	$\times$	PRODUCTO
DIVISIÓN	$\div$	COCIENTE
VALOR ABSOLUTO	$\vert\ \vert$	———
MÁXIMO ENTRO	$[\![\ ]\!]$	———
SUMATORIA	Σ	———
INTEGRACIÓN	$\int$	———
LOGARITMACIÓN	log	———
DIFERENCIA SIMÉTRICA	Δ	———
DERIVADA	$f'(x)$	———

VALOR ABSOLUTO (|.|)

$|x| = x$ (sólo si x es positivo o cero)

$|x| = -x$ (sólo si x es negativo)

MÁXIMO ENTERO ($[\![\ ]\!]$)

$[\![x]\!] = n$; siendo $n \in \mathbb{Z}$ $x \le n < x+1$

OPERACIONES EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA

FILA ENTRADA

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

COLUMNA ENTRADA

Cuerpo de la tabla
(son los resultados de operar los elementos de la columna de entrada con los elementos de la fila de entrada)

LEYES DE COMPOSICIÓN

CLAUSURA O CERRADURA

$$\forall a, b \in A \Rightarrow a * b \in A$$

CONMUTATIVA

$$\forall a, b \in A \Rightarrow a * b = b * a$$

Para operaciones en Tablas:
En el conjunto A = {a, b, c, d} se define:

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	c	b	c	d
c	d	c	a	c
d	b	d	c	b

Existe simetría, los elementos están ubicados simétricamente respecto de la diagonal

EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO

$$\exists\, e \in A / \forall a \in A \Rightarrow a * e = e * a = a$$

Para operaciones en tablas
Se define en A = {1, 2, 3, 4}

$*$	1	2	3	4
1	3	1	4	2
2	1	2	3	4
3	1	3	2	4
4	2	4	1	3

⇨ e = 2

EXISTENCIA DE ELEMENTOS INVERSOS

$$\forall a \in A, \exists\, a^{-1} \in A / a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Para operaciones en tablas
Se define en A = {0, 1, 2, 3}

$*$	0	1	2	3
0	1	2	3	0
1	2	3	0	1
2	3	0	1	2
3	0	1	2	3

⇨ e = 3

RAZ MATEM

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Por definición: } & 0*0^{-1}=3\\ \text{de la tabla: } & 0*2=3\end{array}\right\} 0^{-1}=2$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Por definición: } & 1*1^{-1}=3\\ \text{de la tabla: } & 1*1=3\end{array}\right\} 1^{-1}=1$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Por definición: } & 2*2^{-1}=3\\ \text{de la tabla: } & 2*0=3\end{array}\right\} 2^{-1}=0$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Por definición: } & 3*3^{-1}=3\\ \text{de la tabla: } & 3*3=3\end{array}\right\} 3^{-1}=3$$

SUCESIONES

SUCESIÓN DE FIBONACCI:
1; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ....

SUCESIÓN DE LUCAS:
1; 3; 4; 7; 11; ....

SUCESIÓN DE M. FINBERG O TRIBONACCI:
1; 1; 2; 4; 7; 13; ....

SUCESIÓN ARMÓNICA:
$\frac{1}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{11};\ ....$

SUCESIÓN DE MORGAN:
4; 6; 8; 10; 100; ....

SUCESIÓN DE CAUCHY:
• $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ ....$ • $2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ ....$

SUCESIÓN "P":
$\frac{1}{1^p};\ \frac{1}{2^p};\ \frac{1}{3^p};\ \frac{1}{4^p};\ \frac{1}{5^p};\ ....$

SUCESIÓN NUMÉRICA

$$\boxed{t_n = n^2 + 1}$$

OBSERVACIÓN

t_n = término enésimo o ley de formación.
n = ubicación o lugar del término.

1. LA SUCESIÓN O PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

También se le conoce como sucesión lineal o de 1.^{er} orden.

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \dots,\ t_n$$
$$+r\quad +r \rightarrow \text{razón aritmética}$$

Su término enésimo tiene la forma:

$$\boxed{t_n = t_1 + (n-1)r}$$

NOTA

En una P.A. el número de términos también se puede calcular así:

$$\boxed{\#\ \text{términos} = \frac{t_n - t_1 + r}{r}}$$

Donde: t_n : Último término
t_1 : Primer término
r : Razón

2. SUCESIÓN CUADRÁTICA O DE SEGUNDO ORDEN

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \dots,\ t_n$$
$$m_1\quad m_2\quad m_3$$
$$r\quad r$$

Su término enésimo es de la forma:

$$\boxed{T_n = an^2 + bn + c}$$

Donde a, b y c son valores constantes, los cuales podemos determinar mediante la siguiente regla práctica:

$$\boxed{a = \frac{r}{2}}\quad \boxed{b = m_1 - \frac{3}{2}r}\quad \boxed{c = t_1 - (m_1 - r)}$$

3. LA SUCESIÓN O PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \dots,\ t_n$$
$$\times q\quad \times q \rightarrow \text{razón geométrica}$$

RAZ MATEM

Su término enésimo tiene la forma:

$$t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$$

Donde: t_1 = Primer término
q = Razón geométrica

OBSERVACIÓN

1. Si $q > 1$ entonces la P. G. es creciente.
2. Si $0 < q < 1$ entonces la P. G. es decreciente.

PROPIEDADES

Término central de una P. A.

$$t_c = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{suma de términos}\\ \text{equidistantes}\end{array}\right)}{2}$$

Término central de una P. G.

$$t_c = \sqrt{\left(\begin{array}{c}\text{Producto términos}\\ \text{equidistantes}\end{array}\right)}$$

SERIES

DEFINICIÓN

Es la adición indicada de los términos de una sucesión numérica y al resultado de dicha adición se le llama valor de la Serie.

SERIE ARITMÉTICA

$$S = t_1 \underbrace{+}_{+r} t_2 \underbrace{+}_{+r} t_3 \underbrace{+}_{+r} t_4 + \ldots + t_n$$

$$S = \frac{(t_1 + t_n)n}{2}$$

t_1 : primer término
t_n : último término
n : cantidad de términos

SERIE GEOMÉTRICA

1. SERIE GEOMÉTRICA FINITA

$$S = t_1 \underbrace{+}_{\times q} t_2 \underbrace{+}_{\times q} t_3 \underbrace{+}_{\times q} t_4 + \ldots + t_n$$

$$S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

t_1 : primer término
q : razón
n : cantidad de términos

2. SERIE GEOMÉTRICA DECRECIENTE INFINITA

$$S = t_1 \underbrace{+}_{\times q} t_2 \underbrace{+}_{\times q} t_3 + \ldots$$

$$0 < q < 1$$

$$S = \frac{t_1}{1 - q}$$

t_1 : primer término
q : razón

NOTA

A la suma de una serie decreciente infinita también se le conoce como "suma límite".

SERIES Y SUMAS NOTABLES

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k) = \underbrace{2 + 4 + 6 + \ldots + 2n}_{\text{"n" términos}} = n(n+1)$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}_{\text{"n" términos}} = n^2$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}$$

6. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+...+(2n-1)^2$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}$$

7. $\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

8. $\sum_{k=1}^{n}(2k)^3 = \underbrace{2^3+4^3+6^3+8^3+...+(2n)^3}_{\text{"n" términos}}$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^3 = 2[n(n+1)]^2$$

9. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = \underbrace{1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3}_{\text{"n" términos}}$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

10. $\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = 1\times2+2\times3+...+n(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

11. $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

12. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times2}+...+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

13. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

SERIES CUADRÁTICAS

$$S = t_1+t_2+t_3+t_4+...+t_n$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

$$r \quad r$$

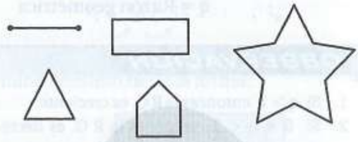
$$t_n = an^2+bn+c$$

$$\Rightarrow S = a\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]+b\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+c\times n$$

CUANTIFICACIÓN DE FORMAS

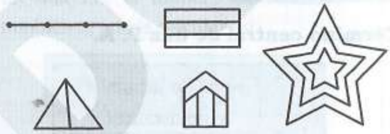
TIPOS DE FIGURAS

I. SIMPLES O UNITARIAS



II. COMPUESTAS

Conformados por 2 ó más simples.

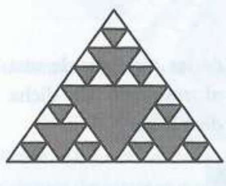


TÉCNICAS DE CONTEO

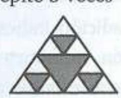
I. POR SIMPLE INSPECCIÓN

En este método debemos fijarnos primero en las primeras formas que se presenta la figura pedida y luego contar por repetición secuencial.

De la figura:



Vemos que se repite 3 veces



Por tanto sólo le añadimos lo que falta, el central y el que encierra a todos. 3[17] + 2 = 53

II. POR AGRUPACIÓN DE PARTES (DE SHOENK)

Se trata de asignar valores o variables a cada parte o porción de la gráfica, luego agrupar dichos elementos de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, etc. empezando por el menor valor.

Hallar el total de cuadriláteros.

De 1 en 1: (No hay)

De 2 en 2: (1;6) (2;6) (3;6) (4;6) (5;6)
$\rightarrow$ 5 cuadriláteros

De 3 en 3: (No hay)

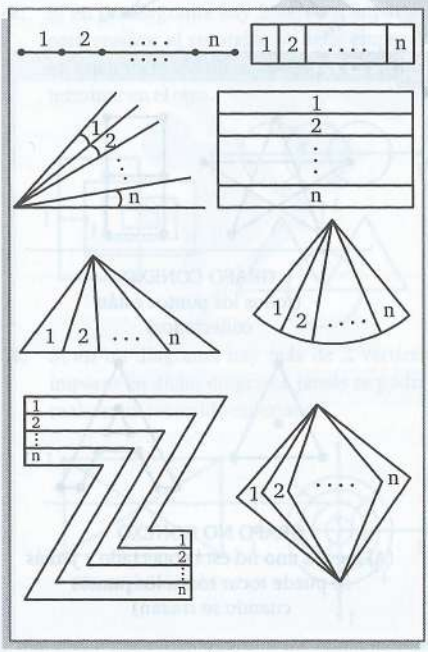
De 4 en 4: (1;6;3;4) (1;6;4;2) (2;6;5;4) (2;6;5;3)

Para posteriores grupos deberíamos empezar con 3 pero ya no tener en cuenta ni al 1 ni al 2 y vemos que ya no existen. $\rightarrow$ 4 cuadriláteros

$\therefore\ 5+4=9$

III. POR INDUCCIÓN O FÓRMULA

En éste caso solo se tendrá en cuenta para figuras secuenciales y en la misma forma (repetitivas).

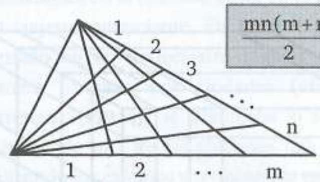


En general:

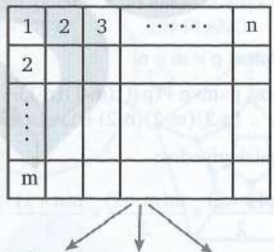
$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

OJO:

$$\boxed{\frac{mn(m+n)}{2}}$$



EN CUADRÍCULAS

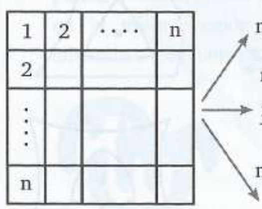


n.° cuadraditos: $m\times n$

n.° cuadrados: $m\times n+(m-1)(n-1)+...+1\times$

n.° cuadriláteros: $\dfrac{m(m+1)}{2}\times\dfrac{n(n+1)}{2}$

CASO PARTICULAR:



n.° cuadraditos: n^2

n.° cuadrados: $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

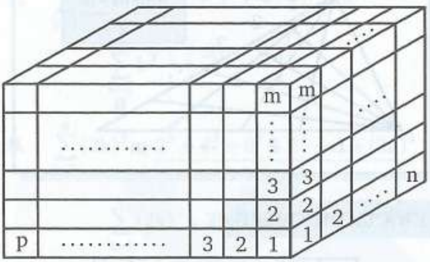
n.° cuadriláteros: $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

NOTA

En el caso que nos pidan cuadriláteros que no sean cuadrados (rectángulos), a todos los cuadriláteros le quitamos los que son cuadrados.

PARALELEPÍPEDOS

Se denomina así a los hexaedros con caras opuestas paralelas 2 a 2. Ejem: un ladrillo, una cajita de fósforo, un libro, un cubo, ... etc.



n.° de cubitos: $p \times m \times n$

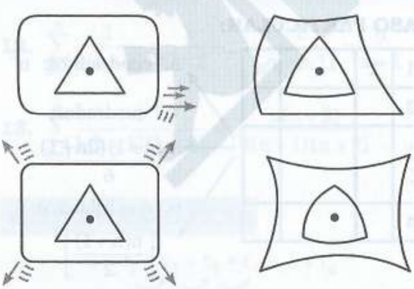
n.° de cubos: $p{\times}m{\times}n+(p\text{-}1)(m\text{-}1)(n\text{-}1)+(p\text{-}2)(m\text{-}2)(n\text{-}2)+\ldots+1\times\bigcirc\times\bigcirc$

n.° de paralelepípedos:

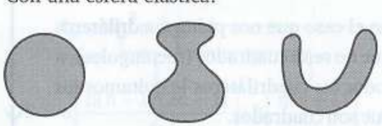
$$\frac{p(p+1)}{2}\times\frac{m(m+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA

TRANSFORMACIÓN TOPOLÓGICA

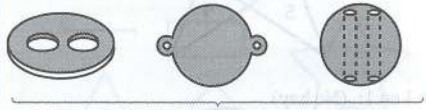


Con una esfera elástica:



Con una rosquilla de un agujero:

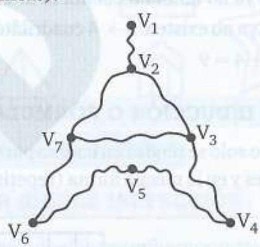
Con una rosquilla de 2 agujeros:



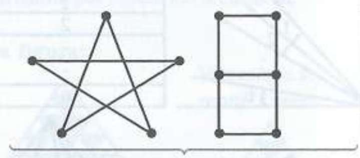
Luego de transformaciones topológicas se obtienen figuras topológicamente equivalentes.

GRAFO

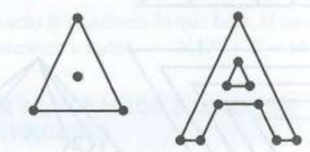
Es un conjunto de vértices (puntos) y aristas (arcos o líneas).



NOTA



GRAFO CONEXO
(todos los puntos están conectados)



GRAFO NO CONEXO
(Al menos uno no está conectado y jamás se puede tocar todos los puntos cuando se trazan)

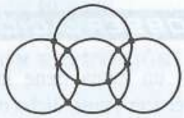
RECORRIDO EULERIANO

Sólo se da en grafos conexos y consiste en recorrer de un solo trazo y sin levantar el lápiz del papel todos los vértices del grafo y además sin pasar por una arista o línea más de una vez.

CONSIDERACIONES

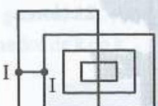
1. Si en un diagrama (grafo) existen sólo vértices pares, se puede realizar el recorrido. Se empieza por cualquier vértice y se concluirá en el mismo punto.

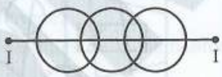
Firma de Mahoma

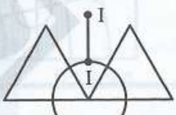


Estrella de David

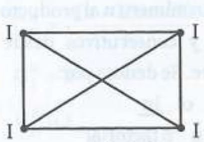
2. Si en un diagrama hay 2 vértices impares, para realizar el recorrido se debe empezar en cualquiera de dichos puntos impares y terminar en el otro.



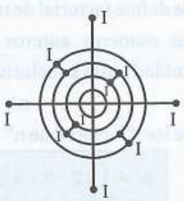




3. Si en un diagrama hay más de 2 vértices impares en dicho diagrama jamás se podrá realizar un recorrido euleriano.

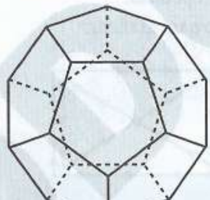


Firma del diablo

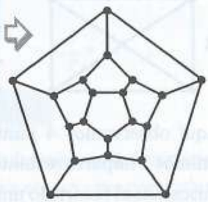


RECORRIDO HAMILTONIANO

Se da un grafo conexo en el cual se debe recorrer las líneas del grafo pasando principalmente por todos los vértices una sola vez, una de sus aplicaciones en la realidad se da en el problema del viajero comerciante. En 1850 R. Hamilton pensaba en un dodecaedro regular como un planeta formado por ciudades (vértices) y carreteras (líneas), se planteaba si se podría visitar cada una de las ciudades una sola vez utilizando los caminos y terminando en el punto inicial. De la siguiente manera:

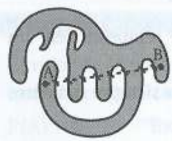


PROYECTADO SOBRE UN PLANO:

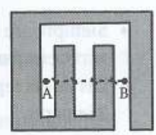


TEOREMA DE JORDAN

1. Al unir 2 puntos (A y B) por una línea, si dicha línea consta de una cantidad par de puntos de corte, ambos puntos unidos están en la misma región (bien dentro del laberinto o bien fuera de el).

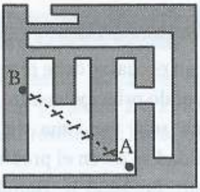


8 puntos de corte
A y B están dentro



4 puntos de corte
A y B están fuera

2. Al unir 2 puntos A y B por una línea, si dicha línea consta de una cantidad impar de puntos de corte, dichos puntos estarán en diferentes zonas.

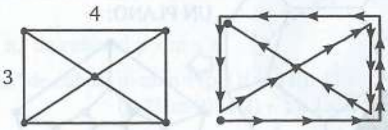


5 puntos de corte (impar)B dentro y A fuera (Diferentes medios)

RECORRIDOS MÍNIMOS EN UN GRAFO

Para obtener el menor recorrido es importante saber que el grafo debe constar de 2 vértices impares, si no hubiese tal cantidad se reduce uniendo por línea los vértices impares 2 a 2, siendo estas líneas, líneas repetidas.

Hallar el recorrido mínimo para graficar:



Aquí observamos 4 puntos impares, por tanto unimos 2 impares restantes por una línea y como buscamos el recorrido mínimo nos conviene unir 2 impares unidos por la longitud 3.

Se observa que se repitió una línea

$$e_m = 2(4) + 2(3) + 2(5) + \underbrace{1(3)}_{\text{Repite}} = 27$$

NOTA

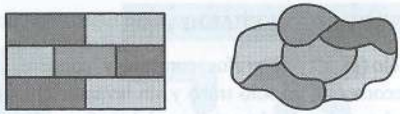
- n° de repeticiones:

$$R = \frac{\#\text{vert. impares}}{2} - 1$$

- Siempre se debe empezar en un vértice impar
- Las líneas repetidas siempre son entre 2 impares

COLORACIÓN DE MAPAS

1 color 2 colores 2 colores



3 colores 4 colores

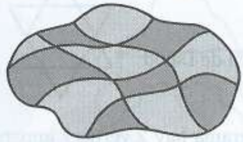
TEOREMA DE LOS 4 COLORES

En 1976 Appel y Haren demostraron a través de la ayuda de un ordenador que:

> "Cuatro colores bastan para colorear cualquier mapa por más complicado que este fuera, inclusive en gráficos en 3D"

OBSERVACIÓN

Si un mapa tiene interiormente sólo vértices pares, dicho mapa sólo necesita 2 colores para su buena coloración.



2 colores

2 colores

ANÁLISIS COMBINATORIO

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Se define factorial de un número **n** al producto de los números enteros y consecutivos desde la unidad hasta **n** inclusive. Se denota por:

$$n! \quad \text{o} \quad \underline{|n}$$

Se lee: "factorial de n" o "n factorial"

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n-1)n \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

PERMUTACIONES

PERMUTACIÓN LINEAL

En general las permutaciones de n elementos tomados de K en K

$$\boxed{P_K^n = \frac{n!}{(n-K)!}} \qquad 0 < K \le n$$

PERMUTACIÓN CIRCULAR

En general las permutaciones circulares de n elementos será:

$$\boxed{Pc_{(n)} = (n-1)!}$$

PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN

$$\boxed{P^n_{k_1,k_2,k_3,\ldots} = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times k_3! \times \ldots}}$$

COMBINACIONES

Las combinaciones son las diferentes formas de agrupar a los elementos de un conjunto, tomando una parte de ellos o todos a la vez.
En una combinación el orden de los elementos no determina una forma diferente. Una combinación se diferencia de otra si posee al menos un elemento diferente.
En general las combinaciones de n elementos tomados de k en k

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad 0 \le k \le n$$

OBSERVACIONES

1. $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$
2. $C_3^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
3. $C_1^n = n$
4. $C_n^n = 1$
5. $C_k^n = C_{n-k}^n$
6. $C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

EXPERIMENTO ALEATORIO

Es aquel experimento en el cual no se puede saber con anticipación lo que va a suceder con exactitud, como por ejemplo sacar con los ojos vendados 2 fichas y ver el resultado:

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Viene a ser el conjunto de todos los sucesos elementales, es decir, es el conjunto de todos los resultados posibles que tiene el experimento.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} ①②;①③;①④;①⑤;①⑥;①⑦ \\ ②③;②④;②⑤;②⑥;②⑦ \\ ③④;③⑤;③⑥;③⑦ \\ ④⑤;④⑥;④⑦ \\ ⑤⑥;⑤⑦ \\ ⑥⑦ \qquad\qquad = C_2^7 = 21 \end{array} \right\}$$

EVENTO O SUCESO (A)

Viene a ser cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, viene a ser un caso particular que se solicita del experimento aleatorio.

$$A = \left\{ ②④;②⑥;④⑥ \right\} = C_2^3 = 3$$

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A) \to \text{Evento}}{n(\Omega) \to \text{Espacio muestral}}}$$

CONSIDERACIONES

- El valor de la probabilidad esta entre 0 y 1 inclusive: $0 \le P(A) \le 1$
- $P(A) = 0$ "Evento imposible"
- $P(A) = 1$ "Evento seguro"
- $P(A) = 1/2$ "Evento dudoso"
- El valor de la probabilidad puede estar expresado en fracción, decimal o porcentaje.

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

RAZ MATEM

NOTA

Por convención $0! = 1$

DESARROLLO PARCIAL DE UN FACTORIAL

$$n! = n(n-1)!$$
$$n! = n(n-1)(n-2)!$$
$$\vdots$$

COFACTORIAL O SEMIFACTORIAL DE UN NÚMERO

$$n!! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times (n-2) \times n$$

n es un número par positivo.

$$n!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (n-2) \times n$$

n es un número impar positivo.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si una actividad A ocurre n maneras diferentes y otras actividad B ocurre de m maneras diferentes, entonces A ó B ocurren de m + n maneras diferentes.

En el principio de adición, o bien se realiza una actividad o bien se realiza la otra, mas nunca pueden realizarse simultáneamente.

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si una actividad A se puede realizar de m maneras y otra actividad B se puede realizar de n maneras, entonces A y B se pueden realizar de $m \times n$ maneras.

En el principio de multiplicación las actividades se realizan una a continuación de otra o simultáneamente.

PROPIEDADES

- Propiedad de 2 eventos complementarios:

  Siendo A: Evento que ocurra A

  A': Evento que no ocurra A

$$P(A) + P(A') = 1$$

- Como los sucesos son subconjuntos de un conjunto mayor que es el espacio muestral, se pueden aplicar algunas propiedades de conjuntos:

  - $A \cup A' = \Omega$
  - $A \cap A' = \phi$
  - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$P(\underset{\text{o}}{A \cup B}) = P(A) + P(B) - P(\underset{\text{y}}{A \cap B})$$

- Si 2 eventos A y B son independientes, es decir la ocurrencia de uno no altera la ocurrencia del otro:

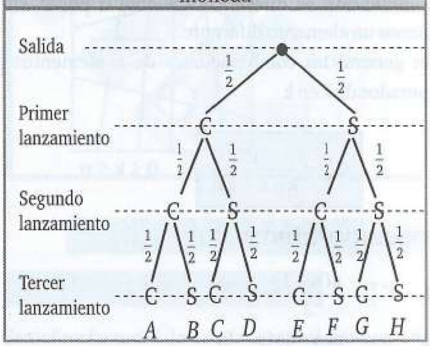
$$P(\underset{\text{y}}{A \cap B}) = P(A) \times P(B)$$

- Si 2 eventos A y B son mutuamente excluyentes es decir ambos no pueden ocurrir simultáneamente $A \cap B = \phi$

$$P(\underset{\text{o}}{A \cup B}) = P(A) + P(B)$$

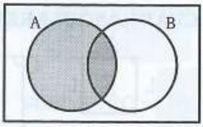
DIAGRAMA DEL ÁRBOL

Diagrama de árbol para el lanzamiento de una moneda



PROBABILIDAD CONDICIONAL

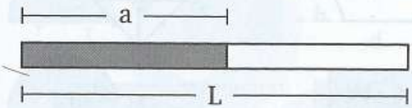
Sea A un suceso cuya probabilidad es distinta de cero, y sea B cualquier suceso. Se llama probabilidad de B condicionado a A o dado que ocurrió A.



$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

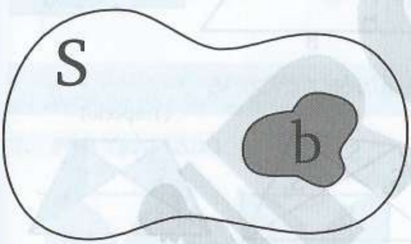
PROBABILIDAD GEOMÉTRICA

EN UN SEGMENTO



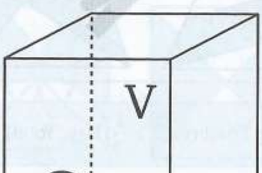
$$P(A) = \frac{a}{L}$$

EN UNA REGIÓN



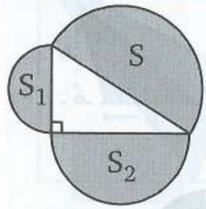
$$P(A) = \frac{b}{S}$$

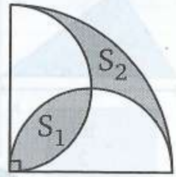
EN VOLÚMENES



$$P(A) = \frac{A}{V}$$

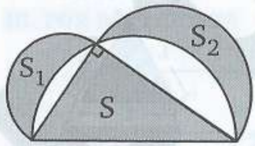
PERÍMETRO Y ÁREA DE REGIONES PLANAS





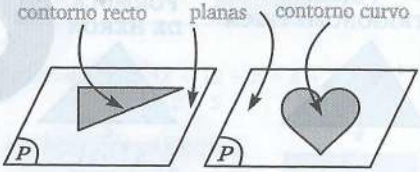
$S = S_1 + S_2$

$S_1 = S_2$



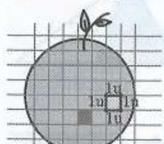
$S = S_1 + S_2$

REGIÓN PLANA



ÁREA

Es la medida de la extensión de una superficie, generalmente para hallar el valor del área se toma como patrón de medida una región cuadrada cuyo lado sea la unidad.



Aproximadamente:
27 m^2 de área

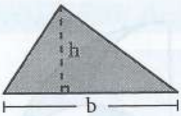
PERÍMETRO

Es la medida del contorno de una región plana, se denota por (2p).

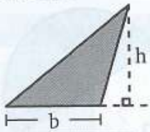
$2p = 2 + 5 + 2 + 5$
$2p = 14$ m

ÁREA DE REGIONES BÁSICAS

REGIONES TRIANGULARES

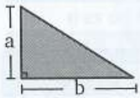


$$S = \frac{bh}{2}$$



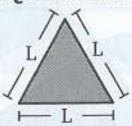
$$S = \frac{bh}{2}$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



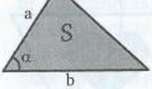
$$S = \frac{b \times a}{2}$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



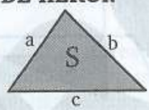
$$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA



$$S = \frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

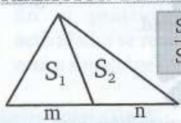
FÓRMULA DE HERÓN



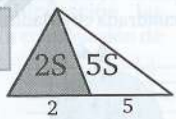
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

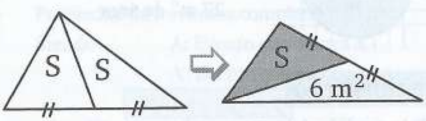
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

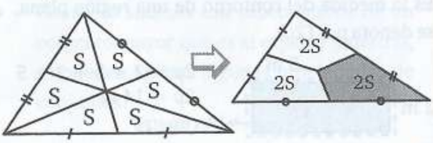
RELACIÓN DE ÁREAS



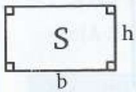
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$





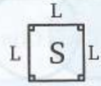


REGIONES CUADRANGULARES



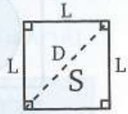
$$S = bh$$

$$2p = 2b + 2h$$

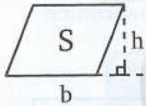


$$S = L^2$$

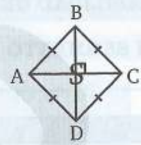
$$2p = 4L$$



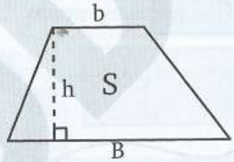
$$S = \frac{D^2}{2}$$



$$S = bh$$

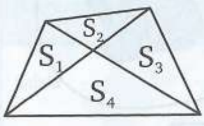


$$S = \frac{(AC)(BD)}{2}$$



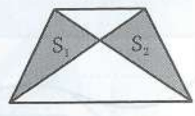
$$S = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$$

RELACIÓN DE ÁREAS

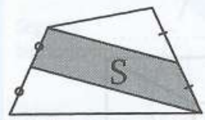


$$S_1 \, . \, S_3 = S_2 \, . \, S_4$$

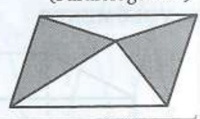
(Trapecio)



$$S_1 = S_2$$

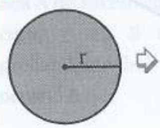


(Paralelogramo)



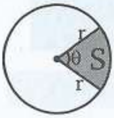
$$\text{Reg. Sombreada} = \frac{1}{2}\,(\text{Reg. Total})$$

REGIONES CIRCULARES



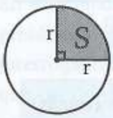
$$S = \pi r^2$$

PERÍMETRO : $2p = 2\pi r$

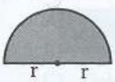


$$S=\frac{\theta}{360}\cdot\pi r^2$$

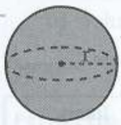
PERÍMETRO : $$2p=\frac{\theta}{360}(2\pi r)$$



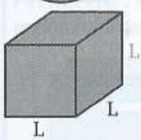
$$S=\frac{\pi r^2}{4}$$



$$S=\frac{\pi r^2}{2}$$



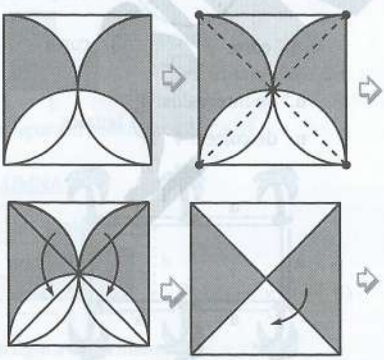
SUPERFICIE ESFÉRICA : $$S=4\pi r^2$$

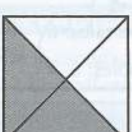


SUPERFICIE CÚBICA : $$S=6L^2$$

PRINCIPALES CRITERIOS PARA CALCULAR EL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

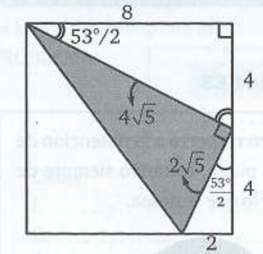
I. POR TRASLADO





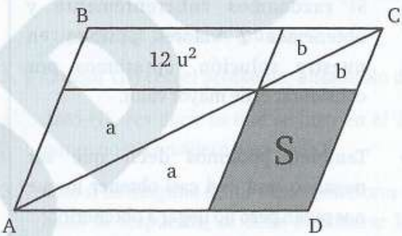
Ya es conocido

II. POR APLICACIÓN DIRECTA DE FÓRMULA



$$\therefore\quad S=\frac{2\sqrt{5}\times4\sqrt{5}}{2}=\frac{8\sqrt{5}^{\,2}}{2}=20$$

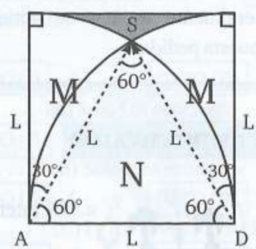
III. POR ECUACIONES

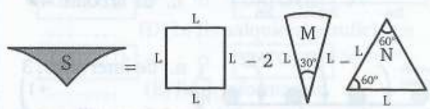


Se observa que: $\cancel{a}+12+\cancel{b}=\cancel{a}+S+\cancel{b}$

$\therefore 12=S$

IV. POR DIFERENCIAS





$$S=L^2-2\left(\frac{\pi L^2}{12}\right)-\frac{L^2\sqrt{3}}{4}=L^2-\frac{\pi L^2}{6}-\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S=L^2\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

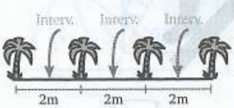
CERTEZAS Y CONTEO DE INTERVALOS

CERTEZAS

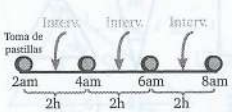
CONSIDERACIONES

- Ser negativo respecto a la obtención de lo que nos piden, tratando siempre de no obtener lo que se desea.
- Siempre nos orientaremos a sacar los elementos que se encuentran en mayor cantidad.
- Si razonamos coherentemente y obtenemos 2 valores posibles en nuestra solución, optaremos por considerar el de mayor valor.
- También podemos decir que ser negativo será casi casi obtener lo que nos piden pero no llegar a obtenerlo.
- Una vez que se ha considerado dichos puntos en la solución del problema se selecciona el elemento necesario que generalmente es 1 y se obtiene la respuesta pedida.

CONTEO DE INTERVALOS

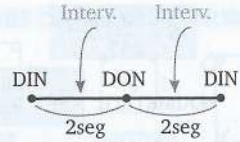


n.º de intervalos: 3
+1
n.º de árboles: 4



n.º de intervalos: 3
+1
n.º de pastillas: 4

N° de intervalos: 2
+1
N° de campanadas: 3



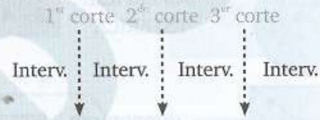
intervalos + 1 = # árboles

intervalos + 1 = # pastillas (tomas)

intervalos + 1 = # campanadas

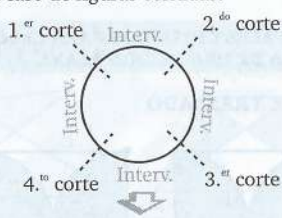
Importante:

- En caso de cortes se cumple:

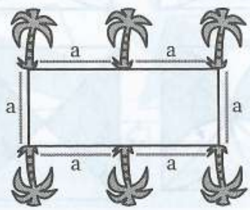


intervalos – 1 = # cortes

- En caso de figuras cerradas:



n.° de intervalos: 4
n.° de cortes: 4
Iguales



n.° de intervalos: 6
n.° de árboles: 6
Iguales

intervalos = # objetos

COMPARACIÓN CUANTITATIVA Y SUFICIENCIA DE DATOS

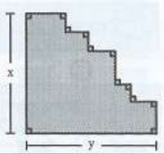
I. COMPARACIÓN CUANTITATIVA

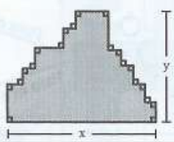
En esta modalidad tendremos 2 columnas con problemas diferentes o un problema con 2 interrogantes diferentes, uno en cada columna que se deberán comparar obteniendo sólo 4 posibilidades.

A) Columna 1 > columna 2; o
B) Columna 1 < columna 2; o
C) Columna 1 = columna 2; o
D) Falta información para poder comparar

Ejemplo:

A	B
Perímetro de la región sombreada	Perímetro de la región sombreada





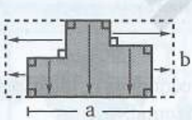
COLUMNA A

Sabemos que:

Perímetro: $2a + 2b$

En la figura el perímetro: $2(x + y)$

COLUMNA B



Perímetro: $2(a + b)$

En la figura el perímetro: $2(x + y)$

OBSERVACIÓN

No importa la cantidad de grados.
Columna A es igual que la columna B.
$\therefore$ Marcaremos la alternativa C.

II. SUFICIENCIA DE DATOS

La forma de la pregunta es:

PROBLEMA: $\boxed{\begin{array}{l}\text{.........................}\\\text{.........................}\\\text{............¿.........?.}\end{array}}$

Datos:
I. ....
II. ....

Para la resolución se debe seguir el siguiente orden:

1.° Cotejar (I) con el problema; si hay o no la respuesta se pasa al 2.° punto.

2.° Cotejar (II) con el problema, aislandolo del dato (I). (es decir lo que se hizo en el 1.° punto no se considera para nada)

3.° Sólo si en ninguno de los pasos anteriores se halló la respuesta, se debe considerar los datos I y II simultáneamente en el problema original.

Se halla la respuesta se marca la alternativa correspondiente.

$\boxed{\text{DATO (I)}}$ ✓ y $\boxed{\text{DATO (II)}}$ ×
.... (A) Sólo I es suficiente

$\boxed{\text{DATO (I)}}$ × y $\boxed{\text{DATO (II)}}$ ✓
.... (B) Sólo II es suficiente

$\boxed{\text{DATO (I)}}$ ✓ y $\boxed{\text{DATO (II)}}$ ✓
.... (C) I y II a la vez son suficientes

$\boxed{\text{DATO (I)}}$ ✓ o $\boxed{\text{DATO (II)}}$ ✓
.... (D) I o II cualquiera es suficiente

$\boxed{\text{DATO (I)}}$ × o $\boxed{\text{DATO (II)}}$ ×
.... (E) Falta información

OBSERVACIÓN

Es importante saber que un dato es suficiente sólo sí con ello se puede hallar un único valor al problema planteado.

INTERPRETACIÓN DE LAS TABLAS Y LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

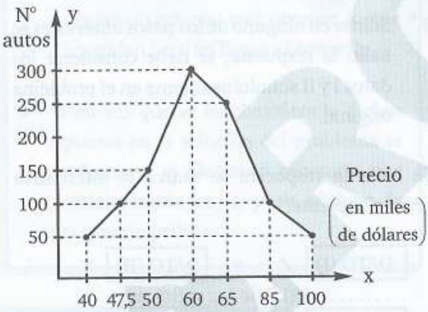
I. TABLAS DE DOBLE ENTRADA

ENTRADA VERTICAL

ENTRADA HORIZONTAL	P	Q	R
A			
B			
C			

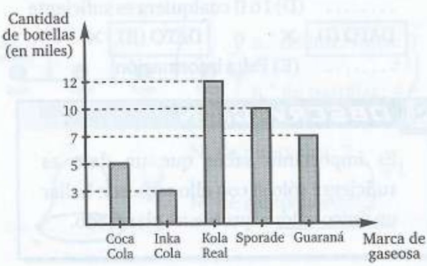
II. POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Se utiliza un sistema de ejes coordenadas donde en el eje x o de las abscisas se señalan los valores de la variable estadística y en el eje y o de las ordenadas se señala las frecuencias.



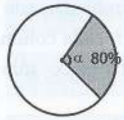
III. DIAGRAMA DE BARRAS SEPARADAS

En este diagrama se puede distinguir 2 tipos, horizontales o verticales; siendo la longitud de la barra la frecuencia de cada característica.



IV. SECTORES CIRCULARES

TODO: 360° < > 100%

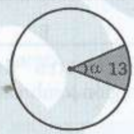


360° —— 100%

α° —— 80%

$$\alpha = \frac{8\cancel{0}\ \cancel{\%} \times 36\cancel{0}°}{10\cancel{0}\ \cancel{\%}} = 288°$$

ALGUNAS REGLAS PARA DETERMINAR EL ÁNGULO Y EL % CONOCIENDO LA FRACCIÓN DEL SECTOR



TOTAL = 52

① $f = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Para el %: ② $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$

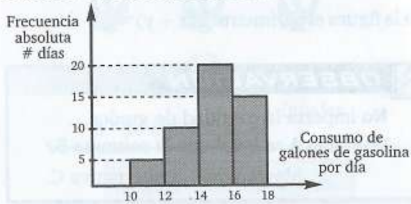
Para el ángulo: ③ $\alpha = \frac{1}{4} \times 360° = 90°$

Es importante saber de memoria algunas equivalencias importantes:

100% < > 360°
75% < > 270°
50% < > 180°
25% < > 90°
20% < > 72°
10% < > 36°
5% < > 18°

V. HISTOGRAMAS

Son barras o rectángulos contiguos cuyas bases se encuentran en el eje horizontal.

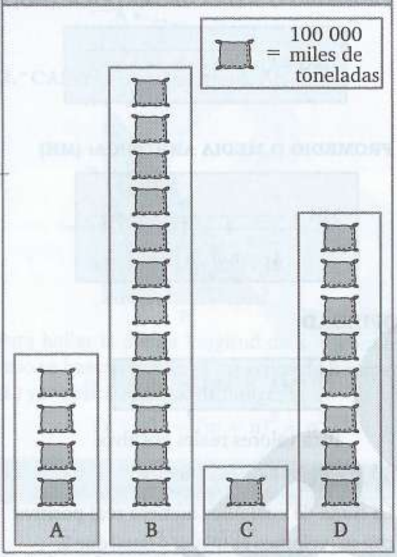


VI. OTROS TIPOS DE GRÁFICAS

LOS PICTOGRAMAS O DIAGRAMAS FIGURATIVOS

Los pictogramas son representaciones gráficas que incluyen, generalmente, figuras o motivos alusivos a la distribución de que se trata.

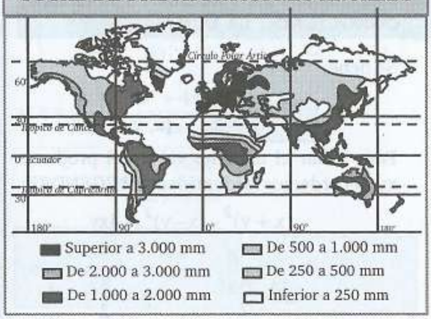
PRODUCCIÓN DE TRIGO



CARTOGRAMAS

Son representaciones gráficas en las que, por medio de diferentes colores o intensidades de colores, o en diferentes tipos de trama, se muestran los distintos valores de la variable.

TOTAL DE PRECIPITACIONES ANUALES



SECUENCIAS NUMÉRICAS, LITERALES Y GRÁFICAS

I. SECUENCIAS Y DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS

En éstos problemas se debe buscar una ley de formación o criterio de orden entre dichos elementos.

$$7 \xrightarrow{\times(-1)} -7 \xrightarrow{+1} -6 \xrightarrow{\times(-2)} 12 \xrightarrow{+2} 14 \xrightarrow{\times(-3)} -42 \xrightarrow{+3} x$$

$$\therefore\ x = -42 + 3 = -39$$

II. SECUENCIAS Y ANALOGÍA LITERALES

Tener en cuenta que las letras CH y LL no intervendrán salvo aclaración en el enunciado del problema.

Si buscamos la razón no hallaremos orden alguno:

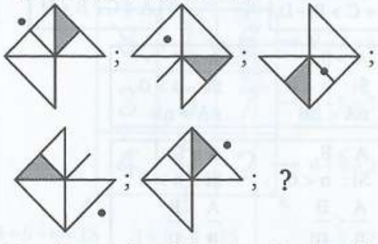
U ;	T ;	C ;	S ;	N ;	? = O
N	R	I	I	U	N
O	E	N	E	E	C
	S	C	T	V	E
		O	E	E	

$\therefore\ ? = O$

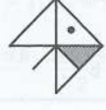
III. SECUENCIAS Y ANALOGÍAS GRÁFICAS

Aquí nos darán figuras que se originan por alguna regla común a todas, el cual se deducirá a partir de la observación cuidadosa.

Ejemplo: ¿Qué figura sigue?



El polígono gira 90° en sentido horario y el segmento interior sale, ingresa, sale, ... etc.

$\therefore$ 

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

I. PROBLEMAS SOBRE PESADAS Y OTRAS SITUACIONES LÓGICAS

El mínimo número de pesadas que se debe hacer en una balanza de 2 platillos para encontrar una bolita diferente a las demás (en el peso) en un total de $\mathbf{3^n}$ bolitas es **n** pesadas.

Ejemplo:
Se tiene 729 bolitas del mismo tamaño y del mismo color pero una de ellas es más pesada si se cuenta con una balanza de 2 platillos ¿en cuántas pesadas como mínimo se encontrará la más pesada?

$$729 = 3^6$$
$$\therefore \ 6 \text{ pesadas}$$

REGLA PRÁCTICA

Tomando como referencia lo del ejemplo :

$9 < 19 < 27 \Rightarrow 3^{2} < 19 < 3^{3}$

El exponente mayor entre 2 y 3 es 3 por tanto ello será la respuesta.

II. PROBLEMAS SOBRE DESIGUALDADES

i. $\begin{array}{c} A > B \\ C > D \\ \hline A + C > B + D \end{array}$

ii. $\begin{array}{c} A < B \\ C > D \\ \hline A + C \ ? \ B + D \end{array}$

iii.

$A > B$ $\text{Si}: n < 0$ $nA < nB$	$A > B$ $\text{Si}: n > 0$ $nA > nB$

iv.

$A > B$ $\text{Si}: n < 0$ $\frac{A}{n} < \frac{B}{n}$	$A > B$ $\text{Si}: n > 0$ $\frac{A}{n} > \frac{B}{n}$

v. Cuando invertimos los 2 extremos en una desigualdad:

$a > b \rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \qquad a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

III. PROBLEMAS SOBRE PROMEDIOS

PROMEDIO O MEDIA ARITMÉTICA: (MA)

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

PROMEDIO O MEDIA GEOMÉTRICA: (MG)

$$MG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n}$$

PROMEDIO O MEDIA ARMÓNICA: (MH)

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

PROPIEDAD

$$MA \geq MG \geq MH$$

Para valores reales positivos

PROPIEDAD

La suma de cualquier número real positivo con su recíproco es mayor o igual que 2.

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Si la suma de 2 recíprocos suman 2:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$$

es por que $a = b$

IV. PROBLEMA DE PRODUCTO MÁXIMO, CONOCIENDO LA SUMA

Se tiene:

$$\boxed{x + y = k} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Para hallar el máximo valor del producto xy; recordemos la identidad de LEGENDRE:

$$(x + y)^2 - \underbrace{(x - y)^2}_{\text{Cero}} = \underbrace{4xy}_{\text{máx}}$$

$$\therefore \ x = \frac{k}{2} \qquad y = \frac{k}{2}$$

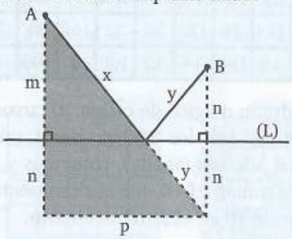
➪ Producto máximo de $xy = \dfrac{k^2}{4}$

De aquí en adelante diremos que si queremos el producto máximo ambos sumandos deben ser iguales.

V. MENOR DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS

1.° CASO:

2.° CASO: Tocando un punto dado:



Para hallar la menor longitud de x + y, en este caso se busca primero el simétrico de B respecto (L) y se aplica Teorema de Pitágoras

$$(x+y)^2 = (m+n)^2 + p^2$$

VI. MÁXIMO Y MÍNIMO DE LAS EXPRESIONES CUADRÁTICAS, "COMPLETAR CUADRADOS"

$$ax^2 + bx + c$$

Completando cuadrados para analizar:

1.° Factorizamos a: $a\left[x^2 + \dfrac{bx}{a} + \dfrac{c}{a}\right]$

2.° en el corchete ahora completamos cuadrados:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{0} - \underbrace{\frac{b^2+4ac}{4a}}_{\text{MÁX o MÍN según corresponda la pregunta}}$$

$\therefore$ Valor de x para obtener el: Máx. o Mín. $x = \dfrac{-b}{2a}$ | Máx. o Mín $= \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

FIGURAS MÁGICAS

CONCEPTO

Son ejercicios que se fundamentan en la teoría de los **cuadrados mágicos.**

CUADRADOS MÁGICOS

Un **cuadrado mágico** se obtiene, colocando una serie de números naturales en una matriz cuadrada, de tal forma que: todas las filas, todas las columnas y las diagonales sumen el mismo número "K", llamado **constante mágica**. General mente suelen colocarse los números entre **1** y $\mathbf{n^2}$, siendo **n** el número de filas y columnas del cuadrado. A esté número n se le denomina **orden del cuadrado mágico.**

Formando un cuadrado mágico de orden n, de esta forma la suma de cada fila, cada columna y diagonal es:

$$K = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Donde: a_1: primer número.

a_n: último número.

Ejemplo:

8+3+4=15 2+7+6=15

8	1	6	→ 8+1+6=15
3	5	7	→ 3+5+7=15
4	9	2	→ 4+9+2=15

4+5+6=15 1+5+9=15 8+5+2=15

Donde: $n = 3;\ a_1 = 1;\ a_n = 9$

$$\therefore K = \frac{3(n^2+1)}{2} = \frac{3(1+9)}{2} = 15$$

GALERÍA DE CUADRADOS MÁGICOS

1. CUADRADO MÁGICO DE LA INDIA

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

La suma de filas, columnas, diagonales y diagonales quebradas (12 + 8 + 5 + 9) o (1 + 11 + 16 + 6) dan 34.

2. CUADRADO MÁGICO ÁRABE

18	38	10	= 66
14	22	30	= 66
34	6	26	= 66
= 66	= 66	= 66	= 66

La suma de filas, columnas y diagonales es de 66 que en el mundo árabe se considera el número de Alá.

3. CUADRADO MÁGICO DE DURERO

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Considerado como el primer cuadrado de su género desarrollado en Europa. Se encuentra en la pintura Melancolía de Durero y tiene la particularidad de mostrar en la parte inferior central el año de creación del cuadro (1514).

4. CUADRADO MÁGICO DIVINO

2	184	16	188	192	10	194	6	198	20
180	24	176	28	172	170	34	166	38	22
142	58	46	148	52	50	154	56	144	160
62	138	136	68	132	130	74	66	124	80
102	98	106	94	90	92	108	116	84	120
100	104	96	114	110	112	88	86	118	82
140	64	76	128	70	72	134	126	78	122
60	158	146	54	150	152	48	156	44	42
40	164	26	174	30	32	168	36	178	162
182	18	186	14	12	190	8	196	4	200

Cuadrado mágico de orden 10 cuyos componentes son los 100 primeros números pares; además las filas, columnas y diagonales suman 1010 que curiosamente es el valor de 10 en el sistema binario.

$$1010_2 = 10$$

5. CUADRADO MÁGICO DOBLE

3	4	21	22	25
20	18	11	16	10
23	13	15	17	7
24	14	19	12	6
5	26	9	8	27

Un cuadrado mágico de orden 5 cuya suma de filas, columnas y diagonales es 45, contiene a otro de orden 3 cuyas sumas es 15.

6. CUADRADOS MÁGICOS ESPECULARES

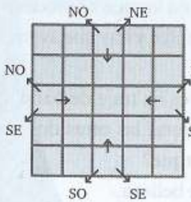
96	64	37	45	( )	69	46	73	54
89	43	98	62	( )	98	34	89	26
84	76	25	57	( )	48	67	52	75
23	59	82	78	( )	32	95	28	87

El de la izquierda se refleja en el de la derecha y ambos tienen sumas iguales a 242.

CONSTRUCCIÓN DE CUADRADOS MÁGICOS

1. CUADRADOS MÁGICOS DE ORDEN IMPAR (I)

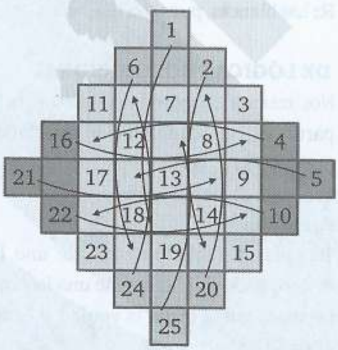
Pueden generarse por el método de Loubere. Comenzando por la casilla central de la primera fila se rellena en forma diagonal en dirección NE o NO, completada una diagonal se desciende una casilla y se repiten los pasos hasta completarlo.



17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

2. CUADRADOS MÁGICOS DE ORDEN IMPAR (II)

Se rellena el rombo empezando de 1 hasta el cuadrado del orden pedido.

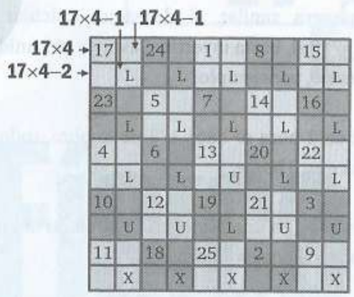


Trasladamos los números de las esquinas del rombo hacia las casillas opuestas del cuadrado que quedaron vacías. Luego se eliminan las esquinas del rombo y queda:

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

3. CUADRADOS MÁGICOS DE ORDEN MÚLTIPLO DE 4 MÁS 2

Como ejemplo tomaremos un cuadrado de orden 10. Aplicamos el método LUX agrupando en subcuadrados de orden 2 y rellenando de la siguiente manera: Como L los cuadrado de las k+1 primeras filas donde k es la división de (10) orden entre 4. En este caso serán 3. La siguiente fila es de letras U y las restantes (1 para el ejemplo) de letras X, se cambia el cuadrado U central con el cuadrado L inmediato superior. Luego rellenamos según Loubere.



Luego rellenamos según LUX

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

REDUCCIÓN A LA UNIDAD

MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

Este método se aplica en aquellos problemas que relacionan: obra, trabajo, caños, grifos, piscinas, desagües, etc, donde no se conoce la magnitud del trabajo o tarea, pero si es conocido el tiempo total que se necesita para hacer dicha obra.

El procedimiento consiste en determinar el avance por unidad de tiempo, para lo cual basta tomar la inversa al tiempo total, así por ejemplo:

1. Si José hace una obra en ocho días, ¿Qué parte de la obra hace en un día?
   Rpta: En un día hace 1/8 de la obra.

2. Si un trabajo se hace en 6 horas, en una hora se hace 1/6 de la obra.

De manera similar, si deseamos calcular el tiempo total, basta invertir el avance por unidad de tiempo, por ejemplo:

1. Si en 1 hora se hace 1/3 de la obra, todo lo hace en 3 horas.

2. Un caño en una hora llena 1/7 de un tanque, todo lo llena en 7 horas.

Ejemplo:
Un caño llena un tanque en 5 horas y estando lleno se puede vaciar en 10 horas por medio de un desagüe. ¿En qué tiempo, se llenará el tanque si el caño y el desagüe se abren a la vez?

Resolución:
El caño en 1 hora llena: 1/5 del tanque.
El desagüe en 1 hora saca: 1/10 del tanque:
Luego en una hora queda:

$$1/5 - 1/10 = 1/10 \text{ del tanque}$$

$\therefore$ Tiempo total es 10 horas.

ACERTIJOS LÓGICOS

Son pasatiempos que consisten en hallar la solución de un enigma o encontrar el sentido oculto de una frase solo por vía de la intuición y el razonamiento, estos acertijos tienen una base matemática o lógica. Para resolver los acertijos más comunes hay que hacer uso de la imaginación y la capacidad de deducción.

TIPOS DE ACERTIJOS

1. ACERTIJOS PARADÓJICOS

Reflejan situaciones en las que se produce un hecho o resultado atípico y hay que averiguar la causa. **Ejemplo:**
Aparecen tres mujeres en traje de baño, una está contenta pero llora, las otras dos están tristes pero ríen. ¿Porqué?
R: Es un concurso de belleza.

2. CON JUEGO DE PALABRAS

Juegos con expresiones de doble significado.
Ejemplo:
¿Qué ovejas dan más lana, las blancas o las negras?
R: Las blancas, pues son más abundantes.

3. DE LÓGICA PROPOSICIONAL

Nos retan a obtener la respuesta correcta a partir de un conjunto de oraciones que pueden ser verdaderas o falsas según condicionantes del acertijo.
Ejemplo:
Tenemos 4 cofres y dentro de uno hay un tesoro. Cada cofre contiene una inscripción y sabemos que 2 dicen la verdad y 2 mienten. ¿Dónde está el tesoro?
Cofre 1: El tesoro no esta aquí.
Cofre 2: El cofre 1 dice la verdad.
Cofre 3: El tesoro no está en el cofre 2.
Cofre 4: El cofre 3 está vacío.
R: Para que se cumpla, el tesoro está en 1.