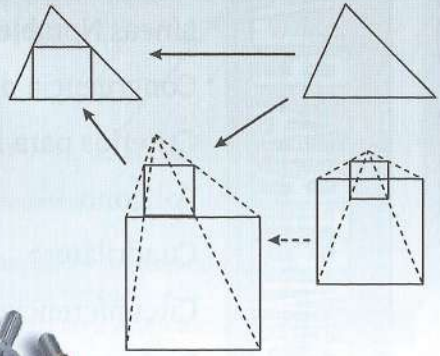
## Resumen Teórico



# Geometría Plana

FONDO EDITORIAL RODO

# ÍNDICE

## RESUMEN TEÓRICO DE GEOMETRÍA PLANA



GEO PLANA



GEO PLANA

### REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

**Punto** • A

**Recta**


**Plano**


**Notación:** Punto A

**Notación:** Recta $\mathscr{L} \equiv \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$; Recta AB $\equiv \overleftrightarrow{AB}$

**Notación:** Plano P $\equiv \square$P

### OBSERVACIÓN

* Semirrecta.- Porción en una recta determinada por un punto sin considerar a dicho punto.
* Rayo.- Es una semirrecta en donde se considera al punto de origen. O: Origen del rayo.

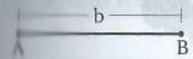

Notación: Semirrecta OA $\equiv \overset{\circ\!\rightarrow}{OA}$

Notación: Rayo OA $\equiv \overrightarrow{OA}$

### SEGMENTO


A y B: Extremos del segmento.
Notación: Segmento AB $\equiv \overline{AB}$

### MEDIDA DE UN SEGMENTO (LONGITUD)

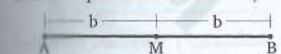



b: Distancia entre A y B.
**Notación:**
Longitud de $\overline{AB} \equiv AB$

$AB = b$

### PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Sea M el punto medio de AB, entonces:

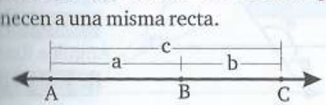



$AM = MB$
$(M \in AB)$

Como las longitudes de los segmentos tienen valores enteros positivos, las operaciones entre ellas también origina valores positivos.

### PUNTOS COLINEALES

Se denomina así cuando dos o más puntos pertenecen a una misma recta.

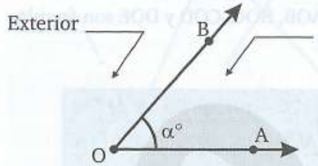



Ahora se observa:

$AB + BC = AC \rightarrow a + b = c$

$AB = AC - BC \rightarrow a = c - b$

### ÁNGULO



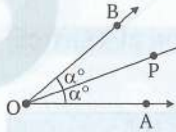

Elementos: O: Vértice del ángulo.
$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$: Lados del ángulo.

Notación: Ángulo AOB $\equiv \angle$AOB

Si α: medida del $\angle$AOB

Medida del $\angle$AOB $\equiv$ m$\angle$AOB $\rightarrow$ m$\angle$AOB = α

### BISECTRIZ DE UN ÁNGULO



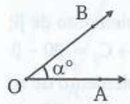

Si $\overrightarrow{OP}$ : Ubicado en el interior del $\angle$AOB

Sea $\overrightarrow{OP}$ la bisectriz del $\angle$AOB, por lo tanto se cumple que:

m$\angle$AOP = m$\angle$POB = α

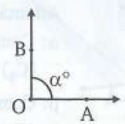
### CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

Ángulo Agudo



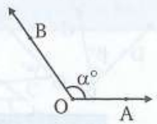

$0 < \alpha < 90$

Ángulo Recto



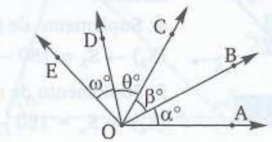

$\alpha = 90$

Ángulo Obtuso




$90 < \alpha < 180$

### ÁNGULOS ADYACENTES Y ÁNGULOS CONSECUTIVOS



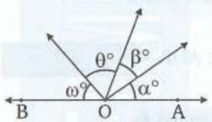
Un par de ángulos que compartan el mismo vértice y un lado se dice que son adyacentes.
Tres o más ángulos que compartan un lado dos a dos y un vértice se dice que son consecutivos. De la figura se observa.
$\angle AOB$ y $\angle BOC$ son ángulos adyacentes.
Los ángulos AOB, BOC, COD y DOE son ángulos consecutivos.
Además:

$m\angle AOC = m\angle AOB + m\angle BOC$

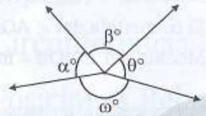
$m\angle AOB = m\angle AOC - m\angle BOC$

$m\angle AOE = \alpha + \beta + \theta + \omega$

**CASOS ESPECIALES**

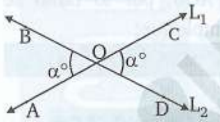


$\alpha + \beta + \theta + \omega = 180$



$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360$

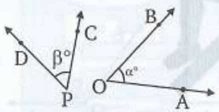
## ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE



$m\angle AOB = m\angle COD$

$m\angle BOC = m\angle AOD$

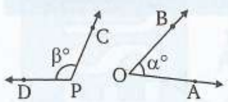
## ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS



$\alpha + \beta = 90$

Además:
α: Complemento de β;
$(C_\beta) \to C_\beta = 90 - \beta$
β: Complemento de α;
$(C_\alpha) \to C_\alpha = 90 - \alpha$

## ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

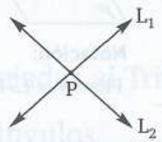


$\alpha + \beta = 180$

Además:
α: Suplemento de β;
$(S_\beta) \to S_\beta = 180 - \beta$
β: Suplemento de α;
$(S_\alpha) \to S_\alpha = 180 - \alpha$

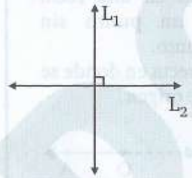
## POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS EN EL PLANO

**RECTAS SECANTES**



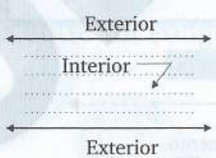
$\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{P\}$
Entonces:
$\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son secantes
P: Punto de intersección

**RECTAS PERPENDICULARES**



En el gráfico:
$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$
⊥: "es perpendicular a"

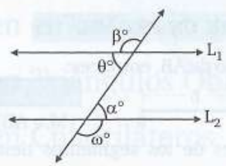
**RECTAS PARALELAS**



$\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \varnothing$
($L_1$ y $L_2$ : coplanares)
Entonces:
$\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$
//: "es paralela a"

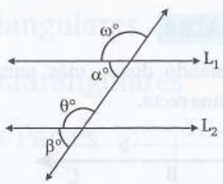
## ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE A ELLAS

**A) ÁNGULOS ALTERNOS**



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$
Se cumple:
Ángulos Internos
$\alpha = \theta$
Ángulos Externos
$\beta = \omega$

**B) ÁNGULOS CONJUGADOS**



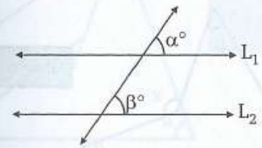
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$
Se cumple:
Ángulos Internos
$\alpha + \theta = 180°$
Ángulos Externos
$\beta + \omega = 180°$







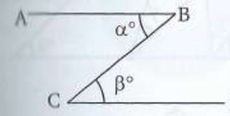
**C) ÁNGULOS CORRESPONDIENTES**



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ Se cumple: $\alpha = \beta$

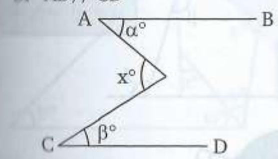
## PROPIEDADES ADICIONALES

1. Si $\overline{AB} // \overline{CD}$



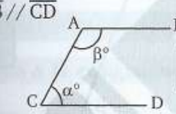
$\alpha = \beta$

2. Si $\overline{AB} // \overline{CD}$



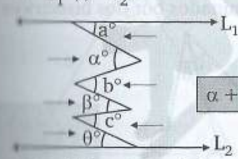
$x = \alpha + \beta$

3. Si $\overline{AB} // \overline{CD}$



$\alpha + \beta = 180$

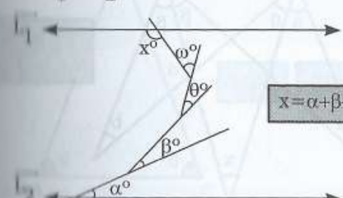
4. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



$\alpha + \beta + \theta = a + b + c$

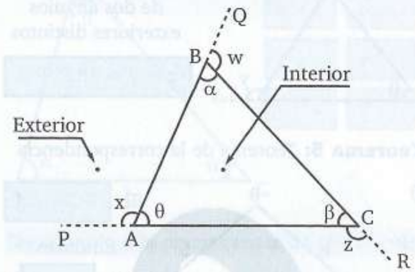
Esta última propiedad se cumple para cualquier número de lados.

5. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



$x = \alpha + \beta + \theta + \omega$

## TRIÁNGULO

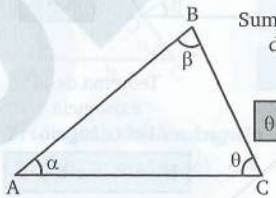



**Elementos** Vértices: A, B y C
Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

**Notación** ΔABC: Triángulo de vértices A, B y C

## TEOREMAS FUNDAMENTALES

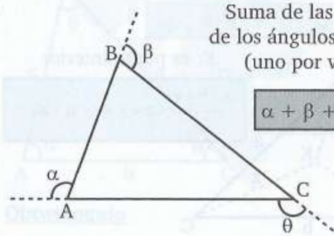
**Teorema 1:**



Suma de las medidas de los ángulos interiores

$\theta + \alpha + \beta = 180°$

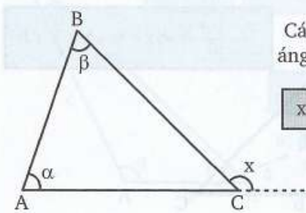
**Teorema 2:**



Suma de las medidas de los ángulos exteriores (uno por vértice)

$\alpha + \beta + \theta = 360°$

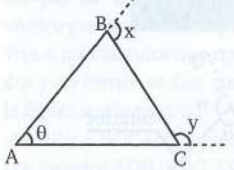
**Teorema 3:**



Cálculo de un ángulo exterior

$x = \alpha + \beta$

**Teorema 4:**

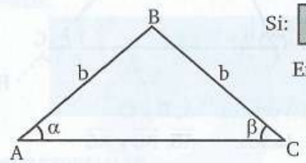


Suma de las medidas de dos ángulos exteriores distintos

$x + y = 180° + \theta$

**Teorema 5:** Teorema de la correspondencia

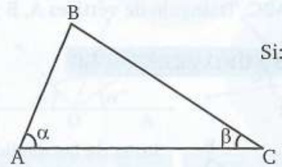
a)



Si: $BC = AB$

Entonces: $\alpha = \beta$

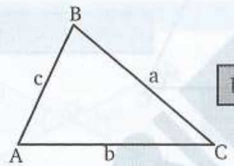
b)



Si: $BC > BA$

Entonces: $\alpha > \beta$

**Teorema 6:**

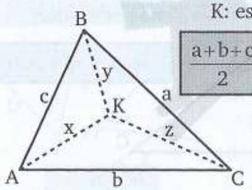


Teorema de la existencia del triángulo

$b - c < a < b + c$

$b \geq c$

**Teorema 7:**

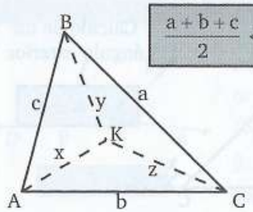


K: es punto interior

$\frac{a+b+c}{2} < x+y+z < a+b+c$

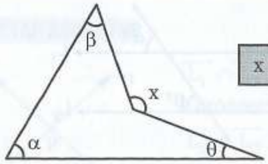
**Teorema 8:** Si: $a > b > c$

$\frac{a+b+c}{2} < x+y+z < a+b$



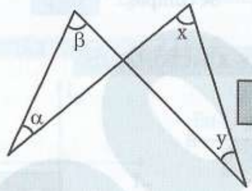
## TEOREMAS ADICIONALES

**1.**



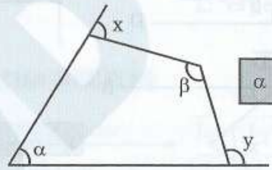
$x = \alpha + \beta + \theta$

**2.**



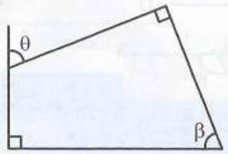
$\alpha + \beta = x + y$

**3.**



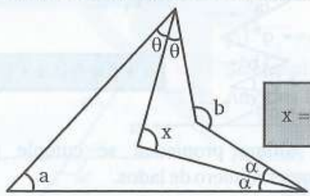
$\alpha + \beta = x + y$

**4.**



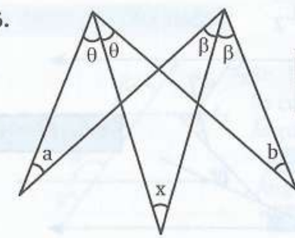
$\beta = \theta$

**5.** Ángulos determinados por dos bisectrices



$x = \frac{a+b}{2}$

**6.**

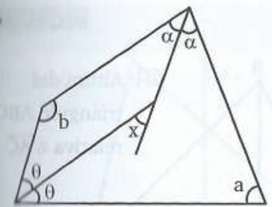


$x = \frac{a+b}{2}$



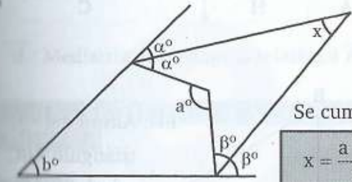


**7.**



$x = \frac{b-a}{2}$

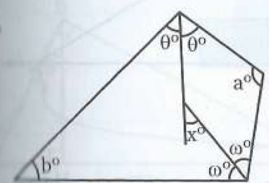
**8.**



Se cumple:

$x = \frac{a-b}{2}$

**9.**



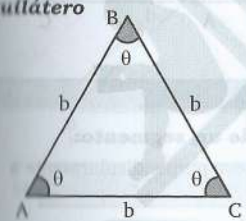
Se cumple

$x = \frac{a-b}{2}$

## CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

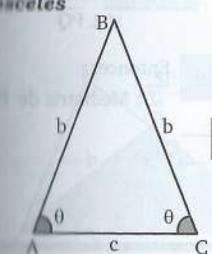
### De acuerdo a la congruencia de sus lados

***Equilátero***



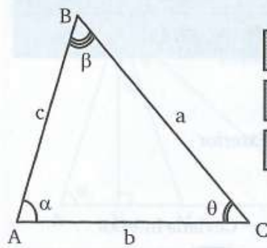
$\theta = 60°$

***Isósceles***



$b \neq c$ | $\theta < 90°$

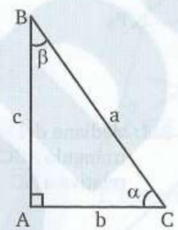
***Escaleno***



| | |
|---|---|
| $a \neq b$ | $\alpha \neq \beta$ |
| $b \neq c$ | $\beta \neq \theta$ |
| $a \neq c$ | $\theta \neq \alpha$ |

### De acuerdo a la congruencia de sus ángulos

***Triángulo Rectángulo***



Donde:

$\overline{BC}$ : hipotenusa

$\overline{AB}$ ; $\overline{AC}$ : catetos

Teorema:

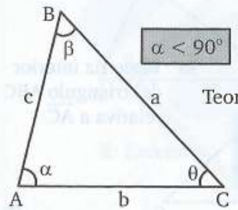
$\alpha + \beta = 90°$

$a^2 = b^2 + c^2$

***Triángulo Oblicuángulo***

(no tiene ángulo recto)

Acutángulo

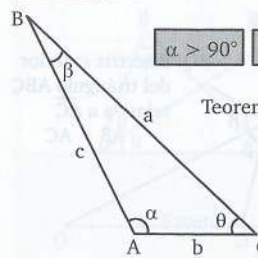


$\alpha < 90°$ | $\beta < 90°$ | $\theta < 90°$

Teorema:

$a^2 < b^2 + c^2$

Obtusángulo



$\alpha > 90°$ | $\beta < 90°$ | $\theta < 90°$

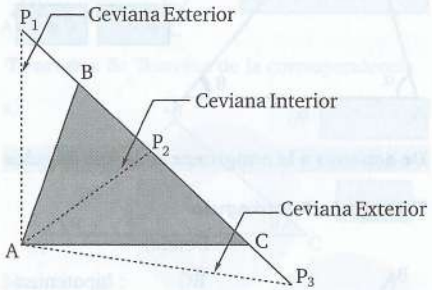
Teorema:

$a^2 > b^2 + c^2$

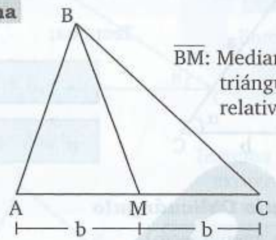
a: longitud del mayor lado

## LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

### CEVIANA

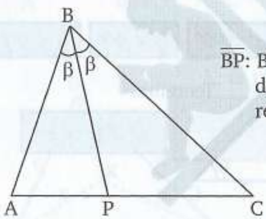



### Mediana



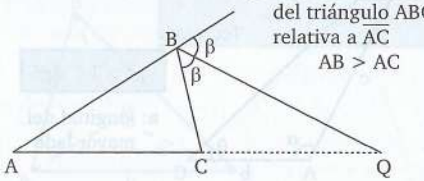

$\overline{BM}$: Mediana del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$

### Bisectriz interior




$\overline{BP}$: Bisectriz interior del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$

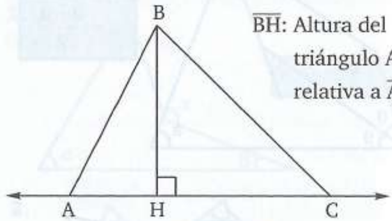
### Bisectriz exterior



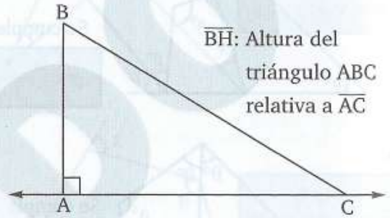

$\overline{BQ}$: Bisectriz exterior del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$

AB > AC

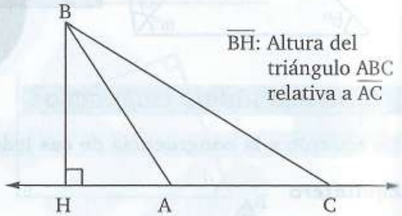
### Altura




$\overline{BH}$: Altura del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$



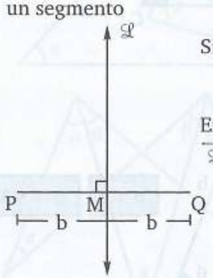

$\overline{BH}$: Altura del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$




$\overline{BH}$: Altura del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$

**NOTA**

**Mediatriz de un segmento:**
Recta que biseca perpendicularmente a un segmento




Si: PM = MQ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{PQ}$

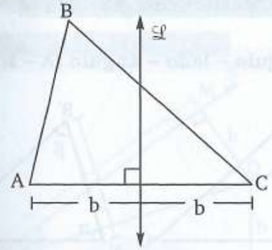
Entonces:
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ : Mediatriz de $\overline{PQ}$

GEO PLANA





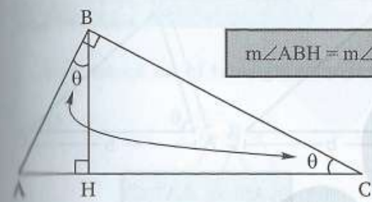
### Mediatriz




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ : Mediatriz del triángulo relativa a $\overline{AC}$

## ÁNGULOS DETERMINADOS POR LÍNEAS NOTABLES

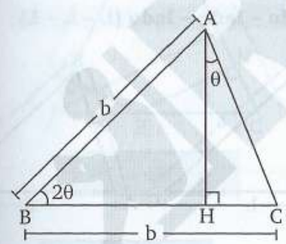
**Teorema 1**




m∠ABH = m∠BCH

**Teorema 2**

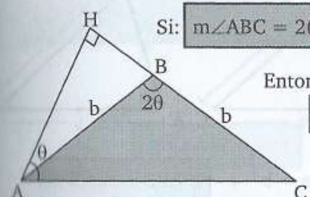
**a)**




Si: m∠ABC = 2(m∠CAH)

Entonces: AB = BC

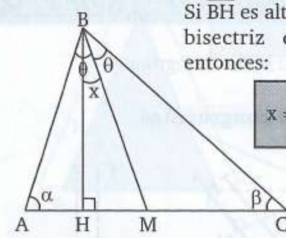
**b)**




Si: m∠ABC = 2(m∠CAH)

Entonces: AB = BC

**Teorema 3**

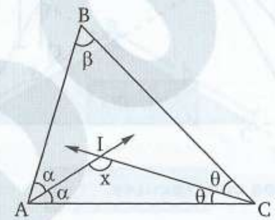



Si $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BM}$ es bisectriz del ∠ABC, entonces:

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

## ÁNGULOS FORMADOS POR BISECTRICES DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

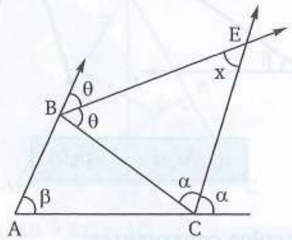
**a)**




I: Incentro

$$x = 90° + \frac{\beta}{2}$$

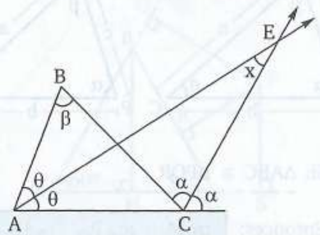
**b)**




E: Excentro

$$x = 90° - \frac{\beta}{2}$$

**c)**




E: Excentro

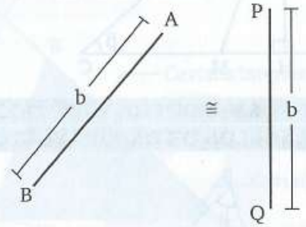
$$x = \frac{\beta}{2}$$

GEO PLANA

## CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

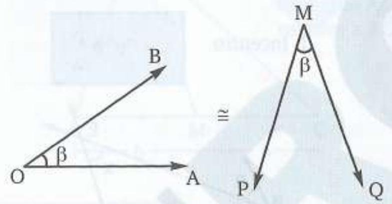
≅: se lee "congruente"

**Segmentos congruentes**



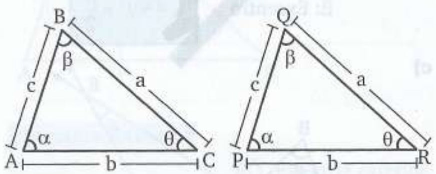

AB = PQ

**Ángulos congruentes**




m∠AOB = m∠PMQ

**Triángulos congruentes**



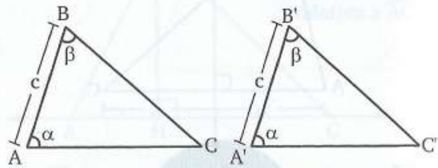

Si: ΔABC ≅ ΔPQR

Entonces:

| | | | |
|---|---|---|---|
| m∠A = m∠P | | AB = PQ | |
| m∠B = m∠Q | y | BC = QR | |
| m∠C = m∠R | | AC = PR | |

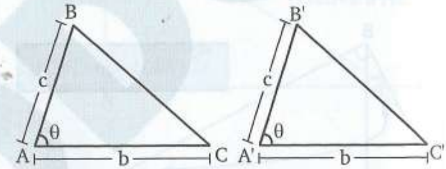
### FORMAS DE RECONOCER A DOS TRIÁNGULOS CONGRUENTES

**1. Ángulo - lado - ángulo (A - L - A)**



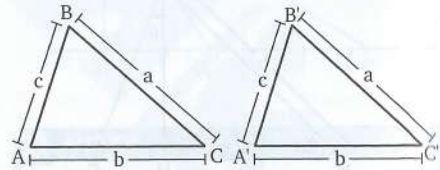

Δ ABC ≅ Δ A'B'C'

**2. Lado - ángulo - lado (L - A - L)**



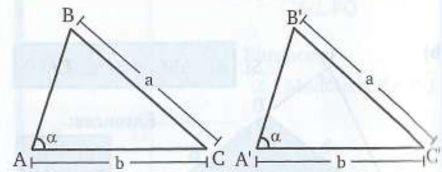

Δ ABC ≅ Δ A'B'C'

**3. Lado - lado - lado (L - L - L)**




Δ ABC ≅ Δ A'B'C'

**4. Lado - lado - Ángulo mayor (L - L - $A_{may.}$)**




Si: a > b → Δ ABC ≅ Δ A'B'C'

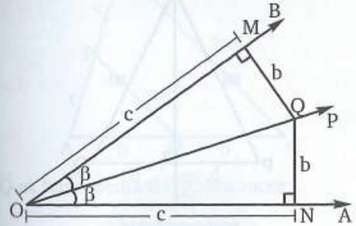






## APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

### TEOREMA DE LA BISECTRIZ



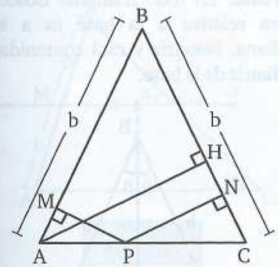

$\overrightarrow{OP}$ : Bisectriz del ∠AOB

Entonces: QN = QM ∧ OM = ON

### NOTAS

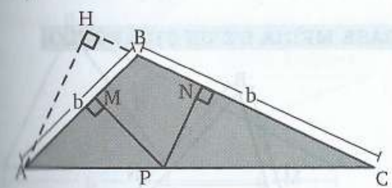
**Teoremas en el triángulo isósceles**

**a)**



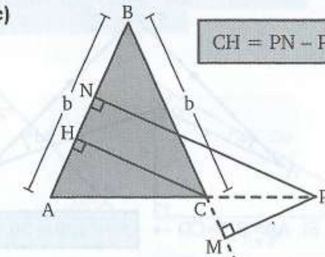

AH = PM + PN

**b)**



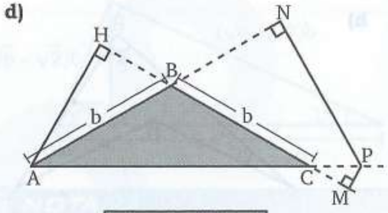

AH = PM + PN

**c)**




CH = PN - PM

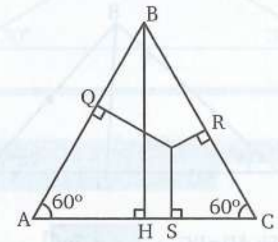
**d)**




AH = PN - PM

**Teoremas en el triángulo equilátero**

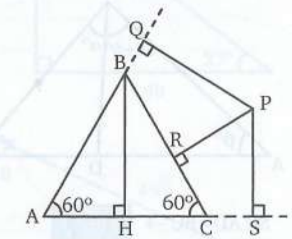
**e)**




Si: AB = BC = AC

→ BH=PQ+PR+PS

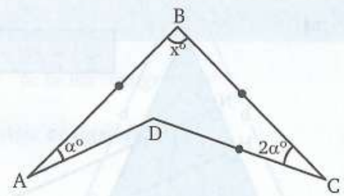
**f)**




Si: AB = BC = AC

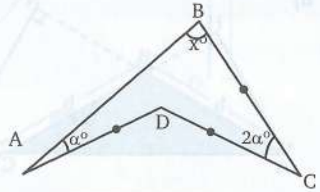
→ BH = PQ + PS - PR

g)



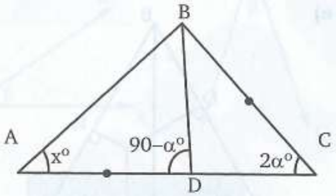

Si: AB=BC=CD → $x = 120 - 2\alpha$

h)



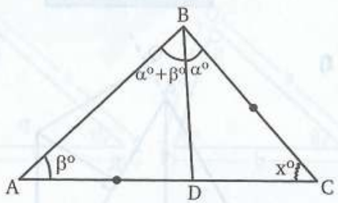

Si: BC=CD=AD → $x = 120 - \alpha$

i)



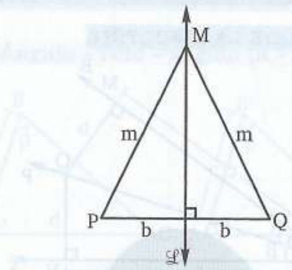

Si: AD=BC → $x = 2\alpha$

j)




Si: AD=BC → $x = \beta$

**TEOREMA DE LA MEDIATRIZ**



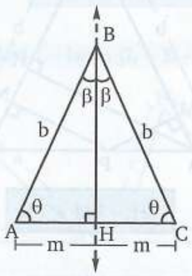

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz de $\overline{PQ}$

M: punto de la mediatriz

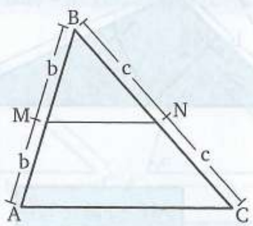
Entonces: $MP = MQ$

**NOTA**

***Teorema:*** En todo triángulo isósceles; la altura relativa a la base es a su vez mediana, bisectriz y está contenida en la mediatriz de la base.




**BASE MEDIA DE UN TRIÁNGULO**

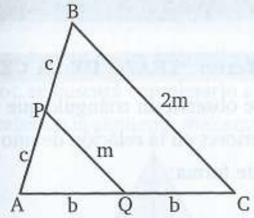



$\overline{MN}$ : base media del ΔABC





**TEOREMA DE LA BASE MEDIA**



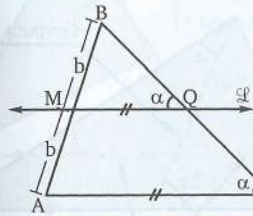

Si $\overline{PQ}$ es base media de $\overline{BC}$ entonces:

→ $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC}$

→ $PQ = \dfrac{BC}{2}$

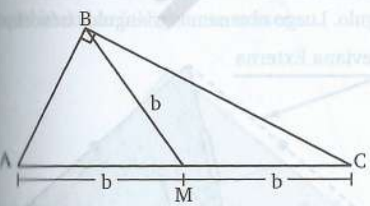
**NOTA**

Si BM = MA y $\mathscr{L}$ // AC entonces:




$BQ = QC$

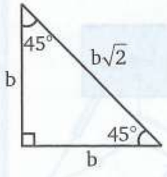
**TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA**

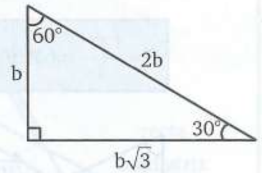


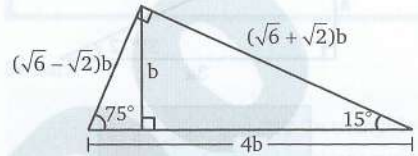

Si BM es mediana entonces:

$$BM = \frac{AC}{2}$$

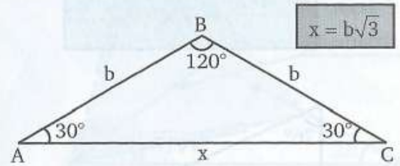
**TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DE ÁNGULOS NOTABLES**



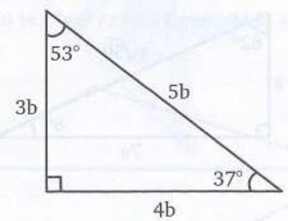



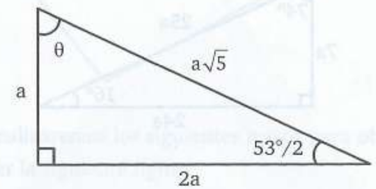




**NOTA**



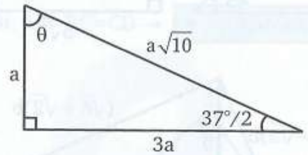

**TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DE ÁNGULOS APROXIMADOS**



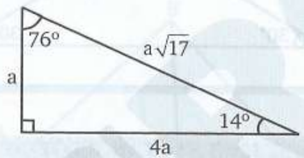
$$\frac{53^\circ}{2} = 26^\circ 30' = 26,5^\circ$$

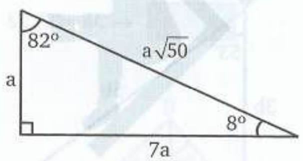
$$\theta = \frac{127^\circ}{2} = 63^\circ 30' = 63,5^\circ$$

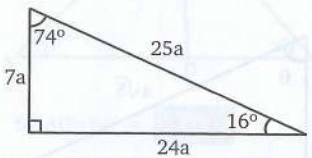



$$\frac{37^\circ}{2} = 18^\circ 30' = 18,5^\circ$$

$$\theta = \frac{143^\circ}{2} = 71^\circ 30' = 71,5^\circ$$



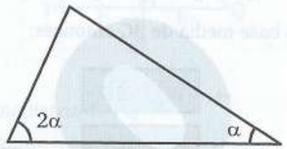




## CRITERIOS PARA HACER TRAZOS AUXILIARES EN TRIÁNGULOS

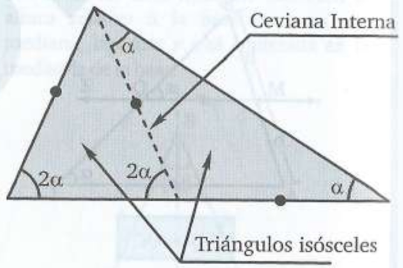
### 1er. Criterio: "TRAZO DE LA CEVIANA"

Cuando se observa un triángulo que tenga ángulos interiores en la relación de uno a dos, de la siguiente forma:



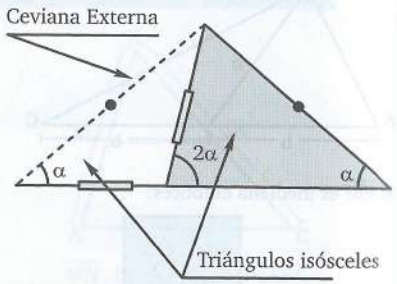

**TRAZANDO CEVIANA INTERIOR**

Se trazará una ceviana interna tal que forme un ángulo igual al mayor en la misma base del triángulo. Luego obtenemos triángulos isósceles.




**TRAZANDO CEVIANA EXTERIOR**

Se trazará una ceviana externa tal que forme un ángulo igual al menor en la misma base del triángulo. Luego obtenemos triángulos isósceles.

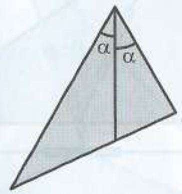




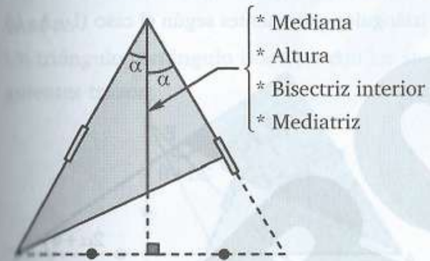



### 2do. Criterio: "COMPLETANDO A UN TRIÁNGULO ISÓSCELES"

Cuando se observa en un triángulo una bisectriz interior, se buscará completarlo a un triángulo isósceles de la siguiente manera:

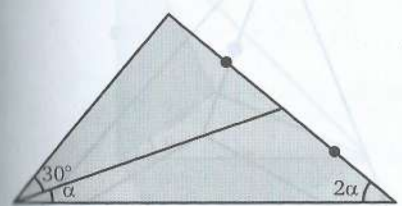



Se hará:



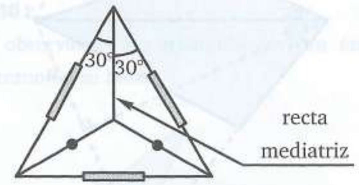

### 3er. Criterio: "COMPLETANDO UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO"

Cuando se observa en un triángulo un ángulo de 30° y como éste valor es la mitad de 60°, se buscará formar externamente un triángulo equilátero, de la siguiente manera:

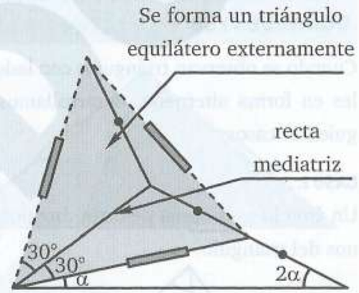



**OBSERVACIÓN**

Tener presente en un triángulo equilátero

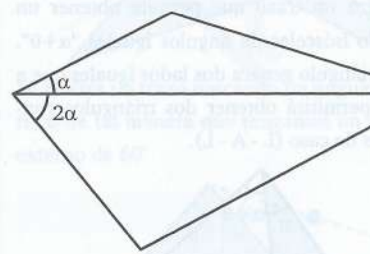



Se hará:

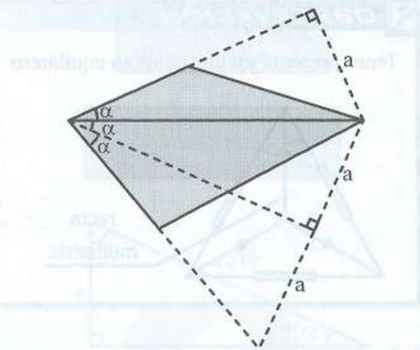



### 4to. Criterio: "PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ"

Cuando se observa una figura de la siguiente forma:




Realizaremos los siguientes trazos para obtener la siguiente figura.



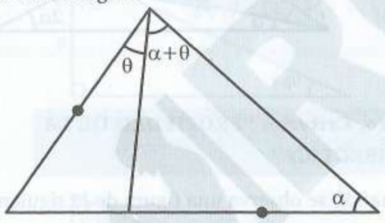

GEO PLANA

## 5to. Criterio: "BUSCANDO TRIÁNGULOS CONGRUENTES"

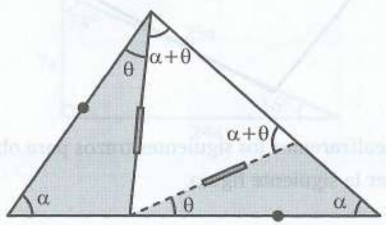
Cuando se observan triángulos con lados iguales en forma alternada, desarrollamos los siguientes casos:

**CASO I:**

Un ángulo es la suma de otros ángulos internos del triángulo.

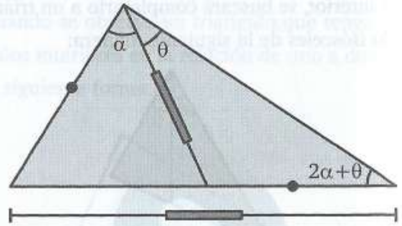



Se realiza un trazo que permite obtener un triángulo isósceles de ángulos iguales "α+θ". Dicho triángulo genera dos lados iguales que a su vez permitirá obtener dos triángulos congruentes de caso (L - A - L).

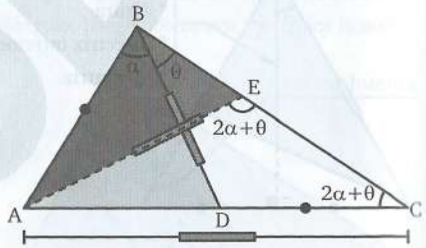



**CASO II:**

Cuando una ceviana es de la misma longitud que el lado mayor del triángulo.



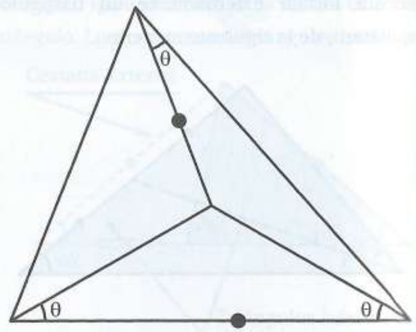

Se realiza el trazo de una ceviana para obtener triángulos isósceles; el cual genera dos lados iguales y dos ángulos iguales. Generando dos triángulos congruentes según el caso (L - A - L)




$\Delta ABE \cong \Delta ABD$

**CASO III:**

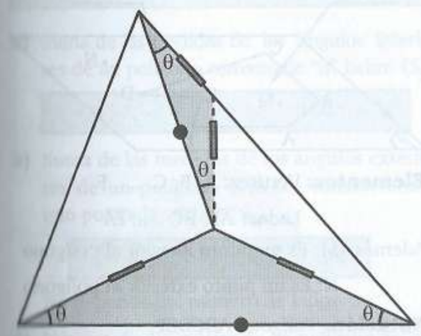
Si tenemos la siguiente figura con las siguientes características





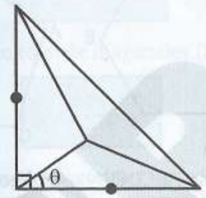



Se realiza el trazo de una ceviana para obtener triángulos isósceles; el cual genera dos triángulos congruentes.

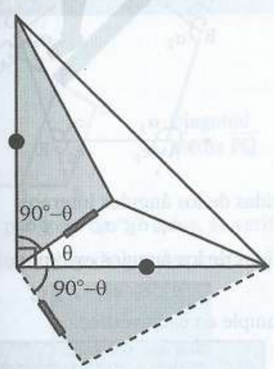



**CASO IV:**

Un triángulo rectángulo isósceles con los siguientes trazos:



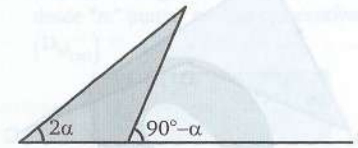

Se realiza un trazo buscando dos lados iguales con ángulos iguales para obtener dos triángulos congruentes del caso (L - A - L)



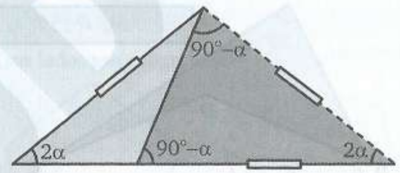

## 6to. Criterio: "TRAZO DEL ÁNGULO SIMÉTRICO (ESPEJO)"

**CASO I:**

Si observamos un triángulo con un ángulo externo en su base.

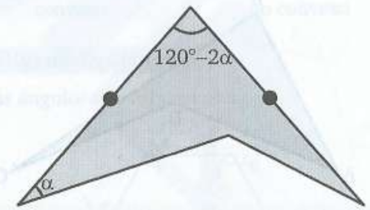



Se realiza un trazo buscando completar dos triángulo isósceles.

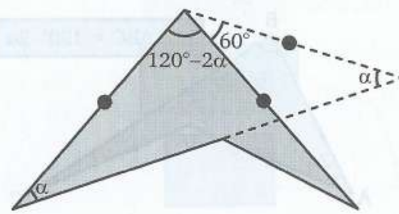



**CASO II:**

Si tenemos está figura con las siguientes características.




Se realiza un trazo buscando un ángulo simétrico de tal manera que tengamos un ángulo externo de 60°

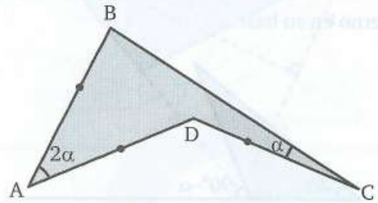



GEO PLANA

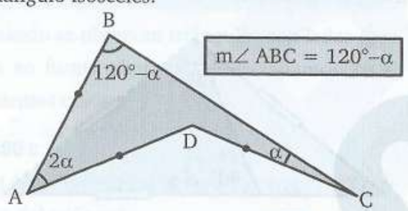
## 7mo. Criterio: "BUSCANDO CUADRILÁTEROS CÓNCAVOS"

**CASO I:**

Si tenemos:



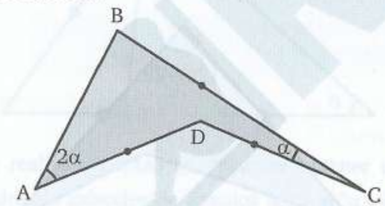

Se realiza un trazo buscando completar dos triángulo isósceles.



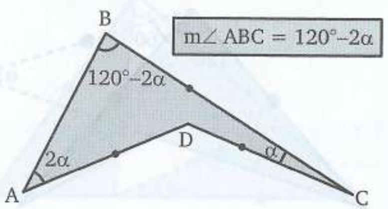

$m\angle ABC = 120° - \alpha$

**CASO II:**

Si tenemos está figura con las siguientes características.

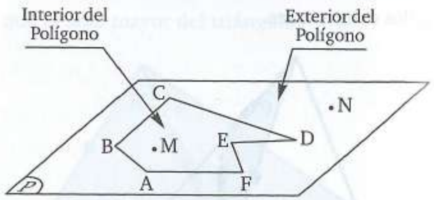



Se realiza un trazo buscando un ángulo simétrico de tal manera que tengamos un ángulo externo de 60°




$m\angle ABC = 120° - 2\alpha$

## POLÍGONO




**Elementos:** Vértices: A; B; C; ......F

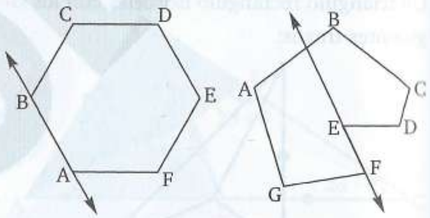
Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}$ ...... $\overline{FA}$

Además: M: Es un punto interior al polígono

N: Es un punto exterior al polígono

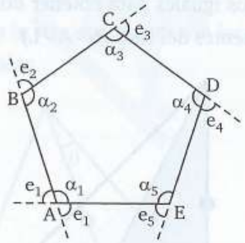
**Notación:** Polígono ABCDEF

## POLÍGONO CONVEXO Y POLÍGONO NO CONVEXO




Polígono ABCDEF es convexo — Polígono ABCDEFG es no convexo

## ÁNGULOS DEL POLÍGONO CONVEXO




Medidas de los ángulos internos: $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ y $\alpha_5$

Medidas de los ángulos externos: $e_1; e_2; e_3; e_4$ y $e_5$

Se cumple en cada vértice:

$m\angle Interior + m\angle Exterior = 180°$





## PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS

1) En todo polígono convexo de "n" lados.

#vértices = #ángulos internos = #lados = n

2) Suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono convexo de "n" lados: ($S_i$)

$$S_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ..... + \alpha_n = 180°(n-2)$$

3) Suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono convexo considerando uno por cada vértice ($S_e$)

$$S_e = e_1 + e_2 + ..... + e_n = 360°$$

No depende del número de lados

4) Número de diagonales de un polígono de "n" lados:

➤ Número de diagonales trazadas desde un vértice ($D_{(1v)}$)

$$D_{(1v)} = n - 3$$

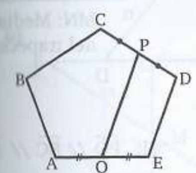
➤ Número total de diagonales (D)

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

➤ Número de diagonales trazadas desde "m" vértices consecutivos ($D_{(m)}$)

$$D_{(m)} = mn - \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

**NOTA**




Diagonal media PQ

En todo polígono de "n" lados, se verifica:

- Número total de diagonales medias ($D_M$)

$$D_M = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Número de diagonales medias trazadas desde el punto medio de uno de sus lados ($D_{M(1L)}$)

$$D_{M(1L)} = n - 1$$

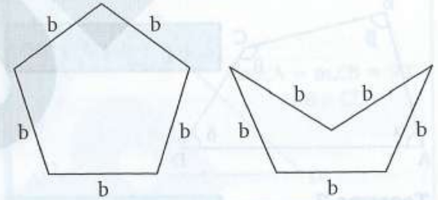
- Número de diagonales medias trazadas desde "m" puntos medios consecutivos ($D_{M(m)}$)

$$D_{M(m)} = nm - \frac{m(m+1)}{2}$$

## POLÍGONOS ESPECIALES

**Polígono Equilátero**

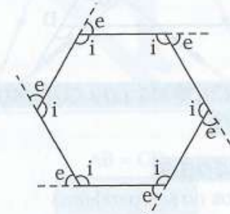
(sus lados son congruentes)




Polígono equilátero convexo — Polígono equilátero no convexo

**Polígono Equiángulo**

(sus ángulos son congruentes)

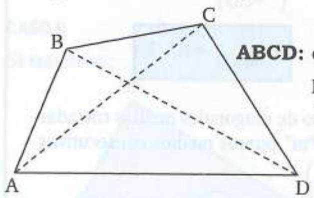



$$i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$e = \frac{360°}{n}$$

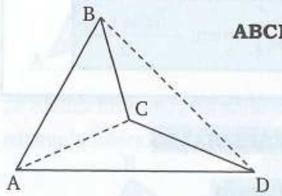
## CUADRILÁTERO

(Polígono de cuatro lados)



**ABCD: convexo**

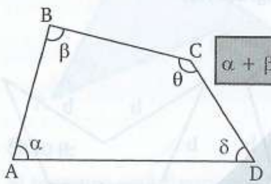
Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$



**ABCD: no convexo o cóncavo**

Diagonales: $\overline{AC}$ y BD

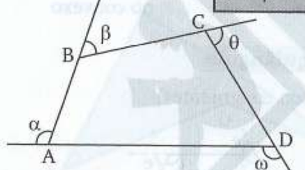
**Teorema 1**



$\alpha + \beta + \theta + \delta = 360°$

**Teorema 2**

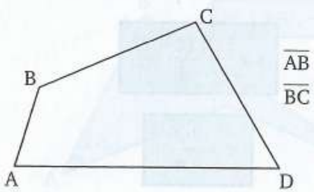
$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360°$



## CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

### A) TRAPEZOIDE

(sus lados no son paralelos)

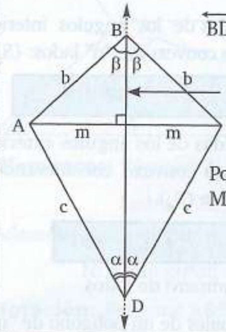


$\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$ y

$\overline{BC} \not\parallel \overline{AD}$

**NOTA**

**Trapezoide Simétrico.** Trapezoide donde una de las diagonales es parte de la mediatriz de la otra.



$\overleftrightarrow{BD}$ : Mediatriz de $\overline{AC}$

Eje de simetría

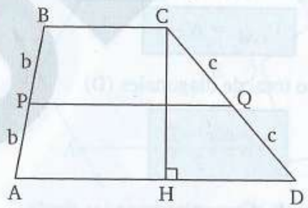
Por propiedad de la Mediatriz

AB = BC

AD = CD

### B) TRAPECIO

(tiene dos lados paralelos llamados bases)



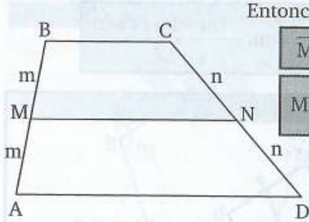
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y

$\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$

$\overline{CH}$: Altura

$\overline{PQ}$: Mediana del trapecio

**Teorema 1**



Si: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

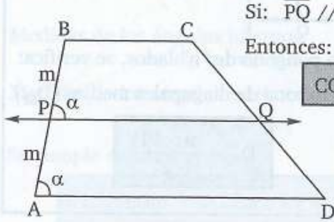
Entonces:

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y

$MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

MN: Mediana del trapecio

**Teorema 2**



Si: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

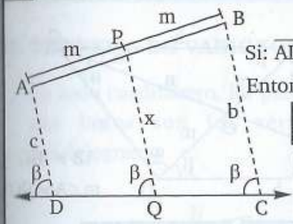
Entonces:

CQ = QD





**NOTA**



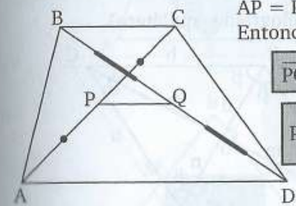
Si: $\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

Entonces:

DQ = QC

$x = \dfrac{b + c}{2}$

**Teorema 3**



Si: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$;

AP = PC y BQ = QD

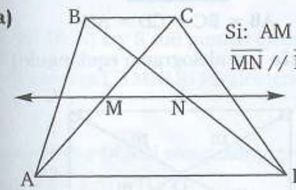
Entonces:

$\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$PQ = \dfrac{AD - BC}{2}$

**NOTA**

a)

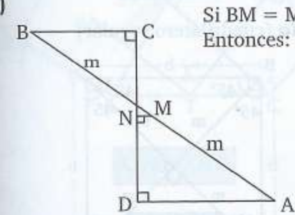


Si: AM = MC y $\overline{MN} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Entonces:

BN = ND $\wedge$ $NM = \dfrac{AD - BC}{2}$

b)



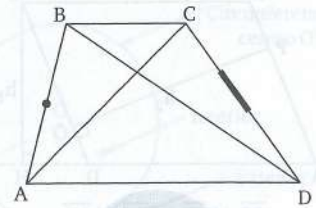
Si BM = MD

Entonces:

CN = ND $\wedge$ $NM = \dfrac{AD - BC}{2}$

### CLASES DE TRAPECIO

***Trapecio escaleno***



AB ≠ CD

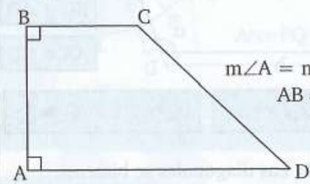
m∠A ≠ m∠D

m∠B ≠ m∠C

AC ≠ BD

**NOTA**

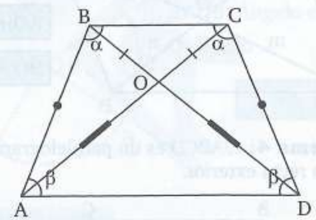
***Trapecio rectángulo***



m∠A = m∠B = 90°

AB ≠ CD

***Trapecio isósceles***



AB = CD

m∠A = m∠D

m∠B = m∠C

AC = BD

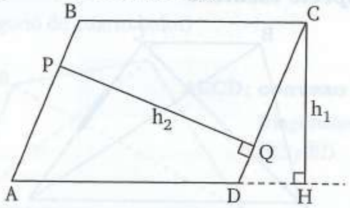
AO = OD

BO = OC

GEO PLANA

## C) PARALELOGRAMO

(sus lados son paralelos)

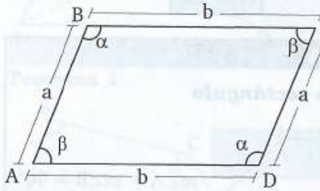


$\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{BC} // \overline{AD}$

$\overline{CH}$ : altura relativa a $\overline{AD}$

$\overline{PQ}$ : altura relativa a $\overline{CD}$

**Teorema:** Los lados y ángulos opuestos son congruentes



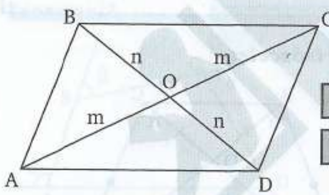
BC = AD

AB = CD

m∠ABC = m∠CDA

m∠BAD = m∠BCD

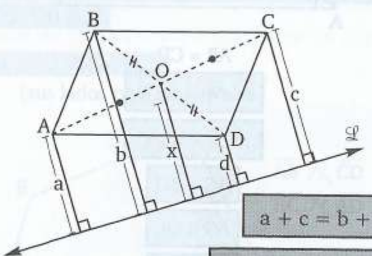
**Teorema 3:** Las diagonales se bisecan.



AO = OC

BO = OD

**Teorema 4:** ▱ABCD es un paralelogramo y ℒ es una recta exterior.

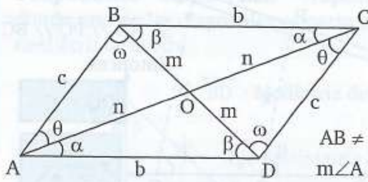


$a + c = b + d$

$4x = a + b + c + d$

## CLASES DE PARALELOGRAMO

***Romboide***



AB ≠ BC y m∠A ≠ 90°

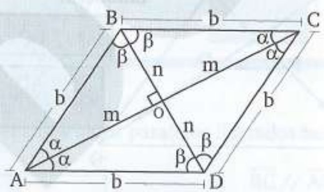
AC ≠ BD

m∠BOA ≠ 90°

m∠BAO ≠ m∠DAO

m∠ABO ≠ m∠CBO

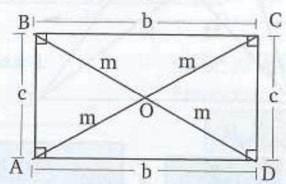
***Rombo*** (paralelogramo equilátero)



$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

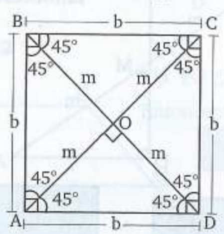
AB = BC = CD = AD

***Rectángulo*** (paralelogramo equiángulo)



AC = BD

***Cuadrado*** (cuadrilátero regular)



AC = BD   $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

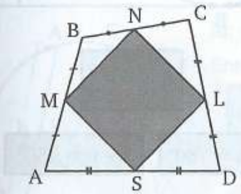


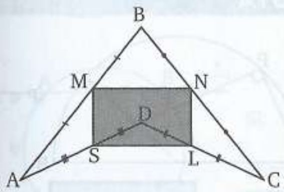


## TEOREMAS ADICIONALES

### 1) TEOREMA DE VARIGNOM

En todo cuadrilátero, los puntos medios de sus lados son los vértices de un paralelogramo.

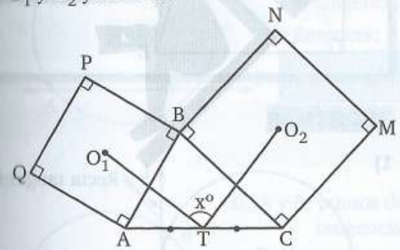




Si: M; N; L y S son puntos medios

Entonces □MNLS: Paralelogramo

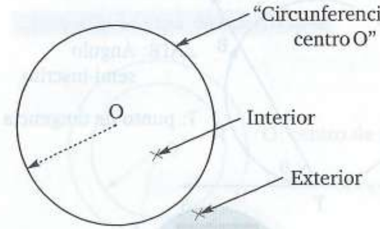
**2)** Si ABPQ y BCMN son cuadrados de centros $O_1$ y $O_2$ y AT=TC.



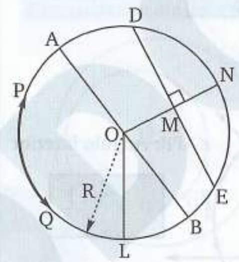
$O_1T = O_2T$

$x = 90$

## CIRCUNFERENCIA




**Elementos:**



Radio: $\overline{OL}$ (OL = R)

Cuerda: $\overline{DE}$

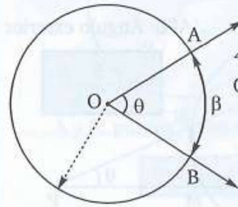
Flecha o sagita: $\overline{MN}$

Diámetro: $\overline{AB}$ (AB = 2R)

Arco PQ ≡ $\overset{\frown}{PQ}$

## POSICIONES RELATIVAS ENTRE UN ÁNGULO Y UNA CIRCUNFERENCIA

### Ángulo Central

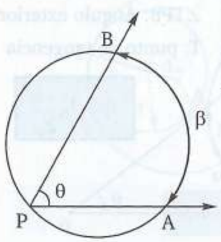


∠AOB: Ángulo central

O: centro

$\beta = \theta$

### Ángulo Inscrito

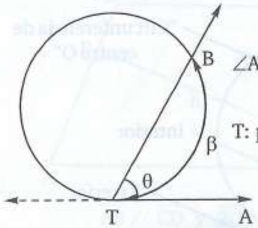


∠APB: Ángulo inscrito

$\theta = \frac{\beta}{2}$

GEO PLANA

## Ángulo Semi-inscrito

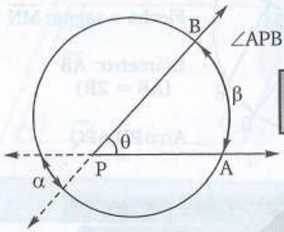



∠ATB: Ángulo semi-inscrito

T: punto de tangencia

$$\theta = \frac{\beta}{2}$$

## Ángulo Interior

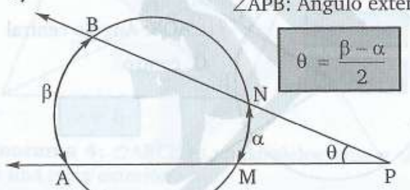



∠APB: Ángulo interior

$$\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

## Ángulo Exterior

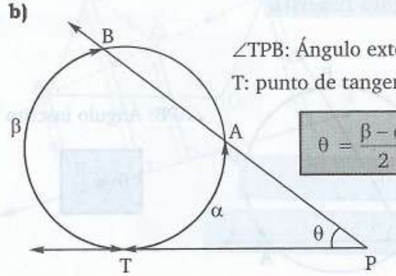
**a)**




∠APB: Ángulo exterior

$$\theta = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

**b)**

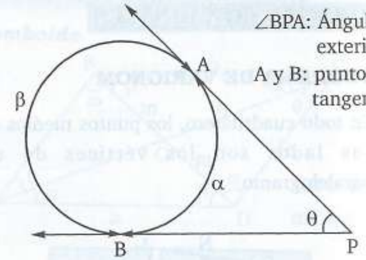



∠TPB: Ángulo exterior

T: punto de tangencia

$$\theta = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

**c)**



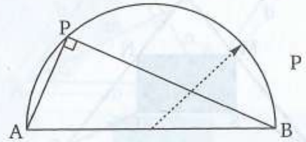

∠BPA: Ángulo exterior

A y B: puntos de tangencia

$$\theta = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

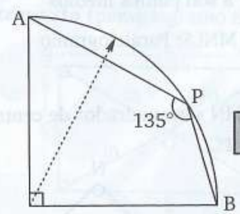
$\alpha + \theta = 180°$ $\quad$ $\beta - \theta = 180°$

### NOTA




$P \in \overset{\frown}{AB}$

$m\angle APB = 90°$

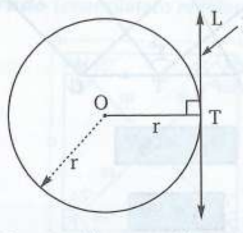



$P \in \overset{\frown}{AB}$

$m\angle APB = 135°$

## TEOREMAS

**1)**



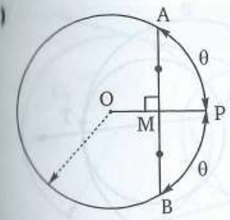

T: punto de tangencia

$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{L}$ $\quad$ $OT = r$





**2)**



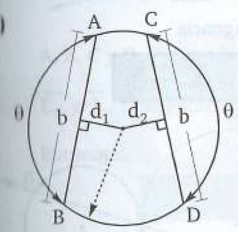

Si: $\overline{OP} \perp \overline{AB}$

Entonces:

$AM = MB$

$m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{PB}$

**3)**



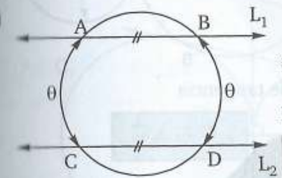

Si: $AB = CD$

Entonces:

$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

$d_1 = d_2$

**4)**

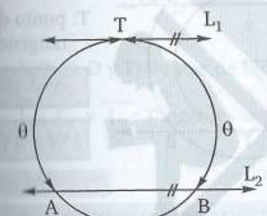



Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

Entonces:

$m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$

**5)**



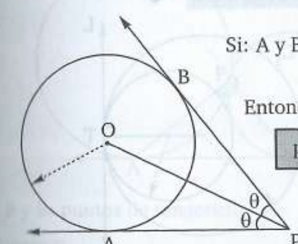

Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

T: punto de tangencia

Entonces:

$m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{TB}$

**6)**




Si: A y B: puntos de tangencia

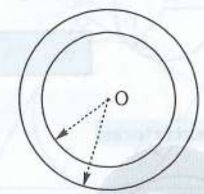
Entonces:

$PA = PB$

Además: $\overrightarrow{PO}$ : Bisectriz del ángulo APB

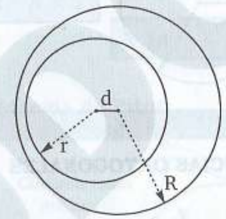
## POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

### Circunferencias concéntricas



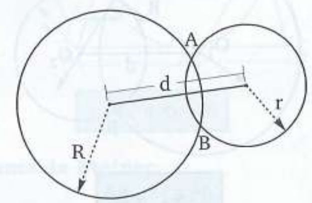

O: centro de ambas

### Circunferencias excéntricas




$d < R - r$

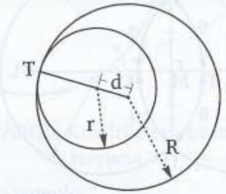
### Circunferencias secantes




A y B: puntos de intersección

$R - r < d < R + r$

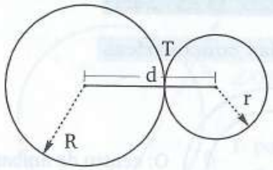
### Circunferencias tangentes interiores




T: Punto de tangencia

$d = R - r$

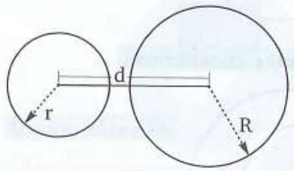
### Circunferencias tangentes exteriores




T: Punto de tangencia

$d = R + r$

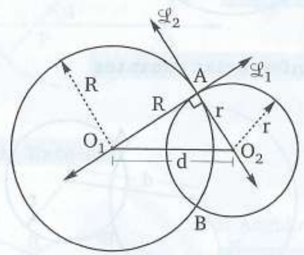
### Circunferencias exteriores




$d > R + r$

**NOTA**

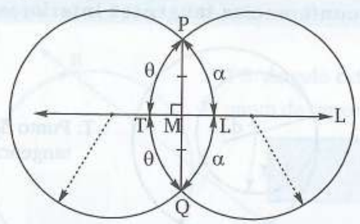
**CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES**




$d^2 = r^2 + R^2$

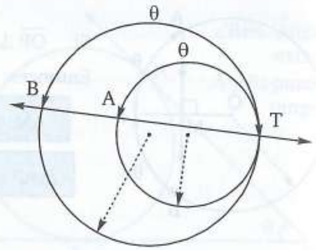
### TEOREMAS

**1)** $\overline{PQ}$: Cuerda común




$PM = MQ$ | $m\overset{\frown}{PT} = m\overset{\frown}{TQ}$ | $m\overset{\frown}{PL} = m\overset{\frown}{LQ}$

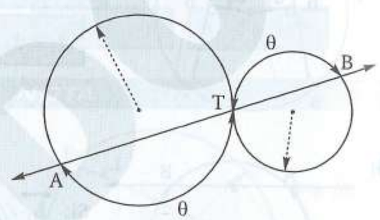
**2)**




T: punto de tangencia

$m\overset{\frown}{TA} = m\overset{\frown}{TB}$

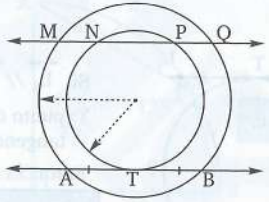
**3)**




T: punto de tangencia

$m\overset{\frown}{TA} = m\overset{\frown}{TB}$

**4)**



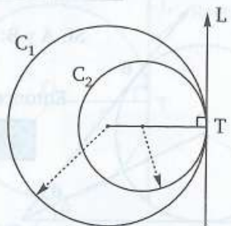

T: punto de tangencia

$AT = TB$

$MN = PQ$

### RECTAS TANGENTES COMUNES A DOS CIRCUNFERENCIAS

**a)**




T : Punto de tangencia

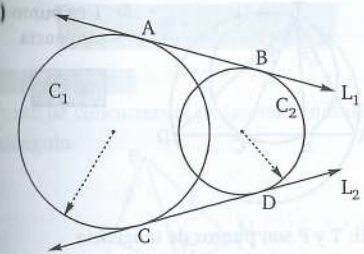
$\overleftrightarrow{L}$ : Tangente común a $C_1$ y $C_2$







**b)**



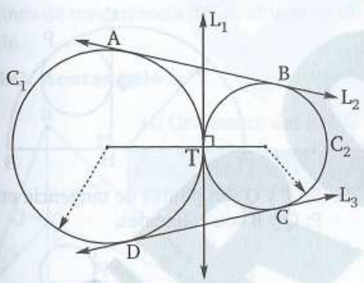

A, B, C y D: Puntos de tangencia

$\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ : Tangentes comunes a $C_1$ y $C_2$

Entonces:

$AB = CD$

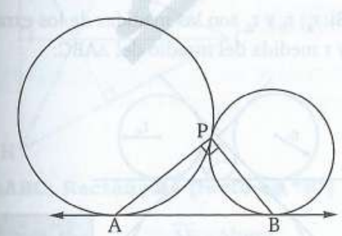
**c)**




A, B, C, D y T: Puntos de tangencia.

$\overleftrightarrow{L_1}$, $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3}$: Tangentes comunes a $C_1$ y $C_2$

### PROPIEDAD



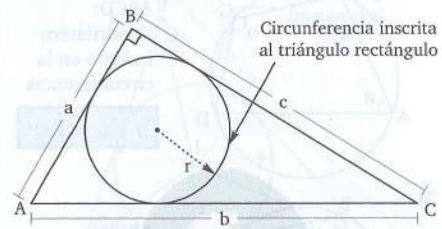

A, P y B: puntos de tangencia

Entonces:

$m\angle APB = 90°$

### POSICIONES RELATIVAS ENTRE UN POLÍGONO Y UNA CIRCUNFERENCIA

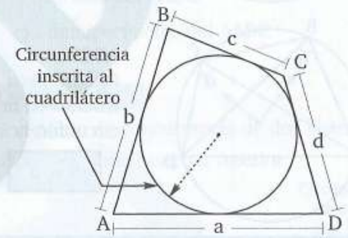
**Teorema de Poncelet**




r: inradio del ΔABC

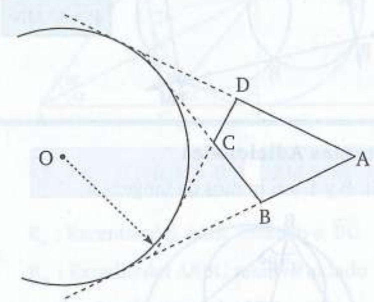
$a + c = b + 2r$

**Teorema de Pitot:**




$a + c = b + d$

**Teorema de Steiner**



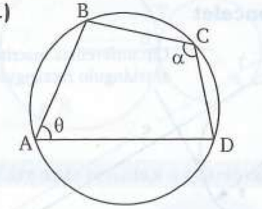

▱ABCD: Cuadrilátero ex-inscrito a la circunferencia

Se cumple:

$AB - CD = AD - BC$

## PROPIEDADES DEL CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

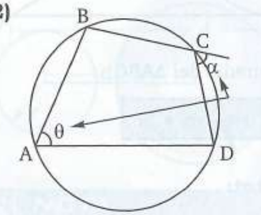
1)



ABCD: Cuadrilátero Inscrito en la circunferencia

$\theta + \alpha = 180°$

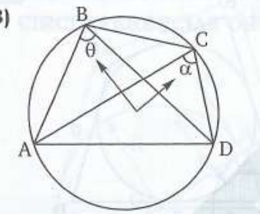
2)



ABCD: Cuadrilátero Inscrito en la circunferencia

$\theta = \alpha$

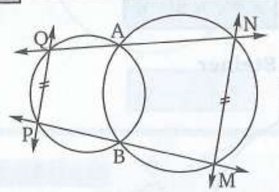
3)



ABCD: Cuadrilátero Inscrito en la circunferencia

$\theta = \alpha$

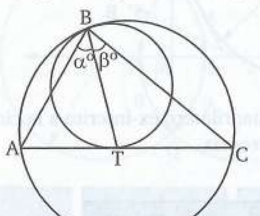
### NOTA



$\overline{PQ} // \overline{MN}$

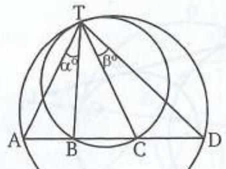
**Teoremas Adicionales**

**1.** Si: B y T son puntos de tangencia



$\alpha = \beta$

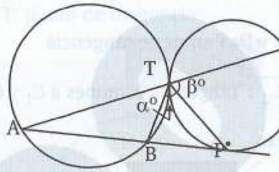
**2.**



Si: T es punto de tangencia

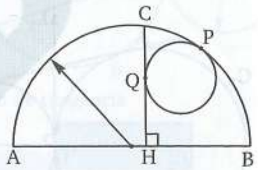
$\alpha = \beta$

**3.** Si: T y P son puntos de tangencia

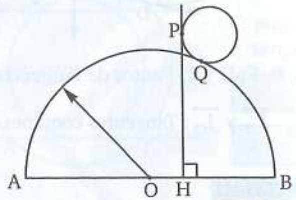


$\alpha = \beta$

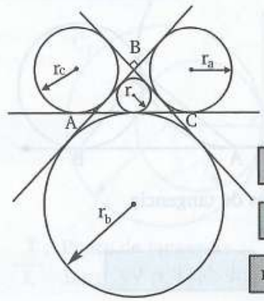
**4.** Si: P y Q son puntos de tangencia entonces A; Q y P son colineales.



**5.** Si: P y Q son puntos de tangencia entonces P; Q y B son colineales.



**6.** Si: $r_a$; $r_b$ y $r_c$ son las medidas de los exradios y r medida del inradio del ΔABC.



$AC = r_a + r_c$

$AC = r_b - r$

$r_b = r_a + r_c + r$

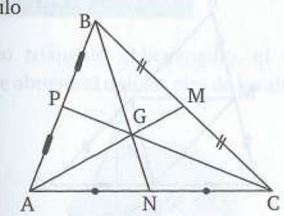




# PUNTOS NOTABLES

## BARICENTRO

Punto de concurrencia de las medianas de un triángulo



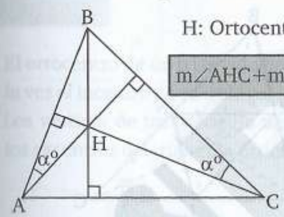
G: Baricentro del ΔABC

$AG = 2(GM)$ $BG = 2(GN)$ $CG = 2(GP)$

## ORTOCENTRO:

Es el punto de concurrencia de las alturas de un triángulo

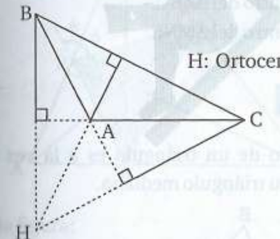
- **ΔABC: Acutángulo**



H: Ortocentro del ΔABC

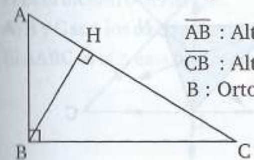
$m\angle AHC + m\angle ABC = 180°$

- **ΔABC: Obtusángulo (obtuso en "A")**



H: Ortocentro del ΔABC

- **ΔABC: Rectángulo (recto en "B")**



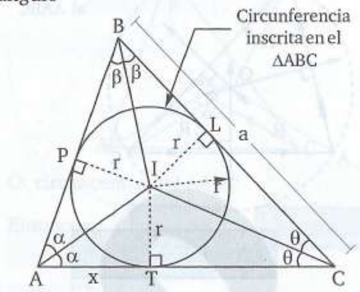
$\overline{AB}$ : Altura

CB : Altura

B : Ortocentro del ΔABC

## INCENTRO:

Punto de concurrencia de las bisectrices de un triángulo




$IL = IT = IP = r$ $x = p - a$

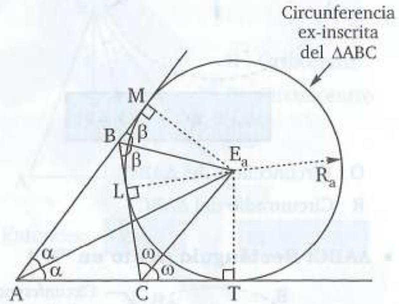
I : incentro del Δ ABC

r : Inradio del ΔABC

p : Semiperímetro del ΔABC

## EX - CENTRO:

Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior




$E_aL = E_aT = E_aM = R_a$ $AM = AT = p$

$E_a$ : Excentro del ΔABC relativo a $\overline{BC}$

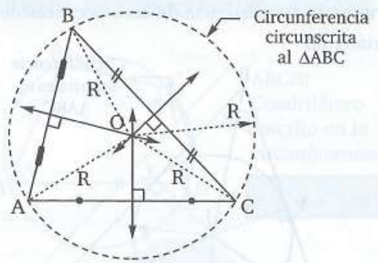
$R_a$ : Exradio del ΔABC relativo al lado $\overline{BC}$

p : Semiperímetro del ΔABC

## CIRCUNCENTRO:

Punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo

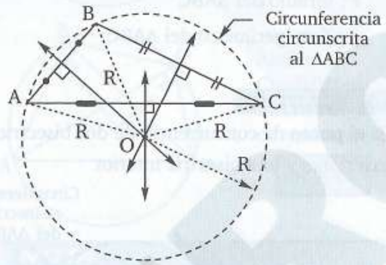
- **ΔABC: Acutángulo**




AO = BO = CO = R

O : Circuncentro del ΔABC
R : Circunradio del ΔABC

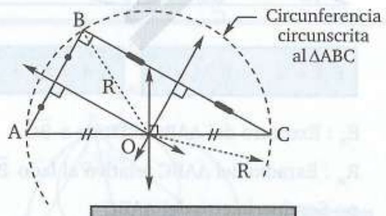
- **ΔABC: Obtusángulo**




AO = BO = CO = R

O : Circuncentro del ΔABC
R : Circunradio del ΔABC

- **ΔABC: Rectángulo (recto en "B")**

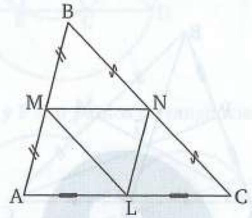



AO = BO = CO = R

O : Circuncentro del ΔABC
O : Punto medio de la hipotenusa
R : Circunradio del ΔABC

## TRIÁNGULO MEDIANO

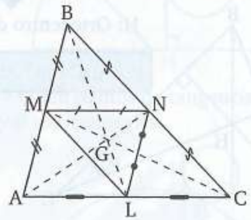
Se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un triángulo.




Si: M; N y L son puntos medios → Δ MNL es el triángulo mediano o complementario y el triángulo ABC se llama antimediano o anticomplementario.

## TEOREMA

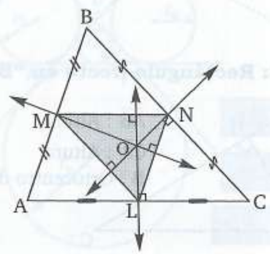
El baricentro de un triángulo es a la vez el baricentro de su triángulo mediano.




En la figura:
* G es baricentro del ΔABC.
* G es baricentro del ΔMNL.

## TEOREMA

El circuncentro de un triángulo es a la vez el ortocentro se su triángulo mediano.



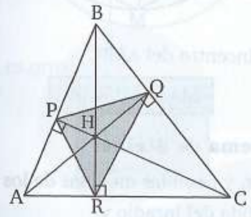





En la figura:
- O es circuncentro del ΔABC.
- O es ortocentro del ΔMNL.

## TRIÁNGULO ÓRTICO

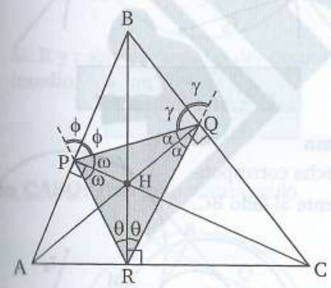
En todo triángulo oblicuángulo, el triángulo órtico se obtiene al unir los pies de las alturas.




En la figura:
- ΔPQR es el triángulo órtico.
- ΔABC es el triángulo antiórtico.

## TEOREMA

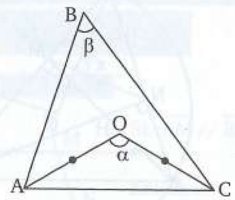
- El ortocentro de un triángulo acutángulo es a la vez el incentro de su triángulo órtico.
- Los vértices de un triángulo acutángulo son los excentros del triángulo órtico.




En la figura:
- H es el ortocentro del ΔABC.
- H es el incentro del ΔPQR.
- A; B y C son los excentros del ΔPQR.
- El ΔABC es el Δ ex – incentral del Δ PQR.

## TEOREMAS

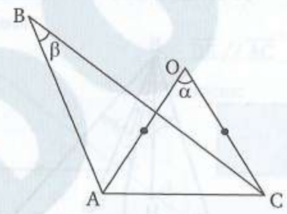
**1)**




O: circuncentro del ΔABC

Entonces: $\alpha = 2\beta$ AO = OC

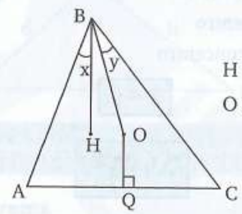
**2)**




O: circuncentro del ΔABC (obtuso en A)

Entonces: $\alpha = 2\beta$ AO = OC

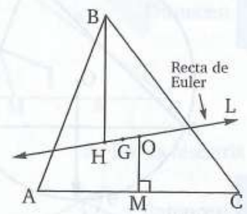
**3)**




H : Ortocentro
O : Circuncentro

Entonces: $x = y$ BH = 2(OQ)

**4)**

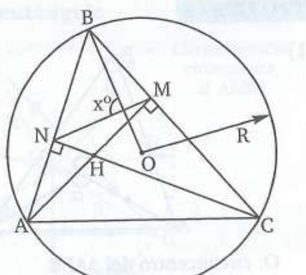



H : ortocentro
G : baricentro
O : Cincuncentro

HG = 2(GO)
BH = 2(OM)

Se cumple: H, G y O son colineales

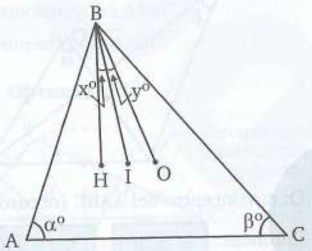
**5)**




Si: H: Ortocentro
O: Circuncentro

$x = 90°$

**6)**

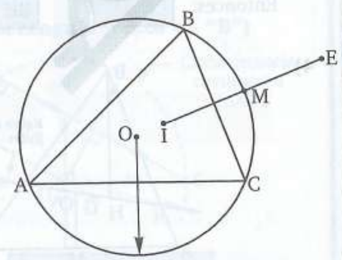



Si: H: Ortocentro
I : Incentro
O: Circuncentro

$x = y$

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

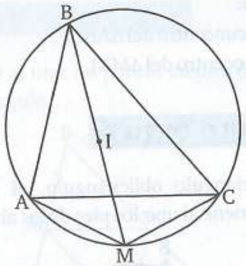
**7)**




Si: I : Incentro
E : Excentro

$IM = ME$

**8.**

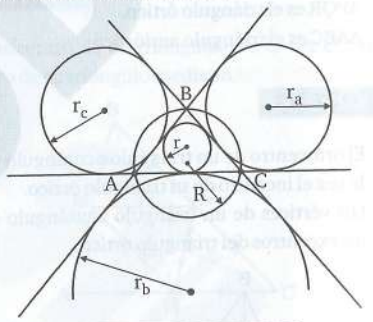



Si: I : Incentro del ΔABC

$MA = MI = MC$

**9. Teorema de Steiner**

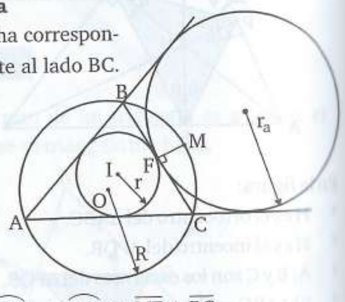
Si: $r_a$; $r_b$ y $r_c$ son las medidas de los exradios.
r: medida del inradio y
R: medida del circunradio




$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

**Teorema**

$\overline{MF}$: Flecha correspondiente al lado BC.



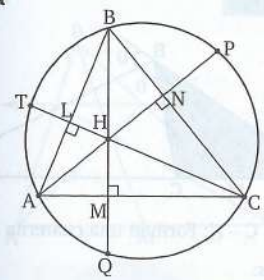

Si: $\overset{\frown}{BM} = m\overset{\frown}{MC}$ y $\overline{MF} \perp \overline{BC}$

$$MF = \frac{r_a - r}{2}$$





**Teorema**

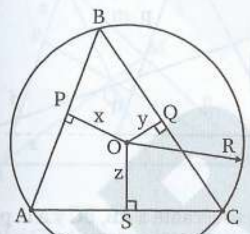



Si: H es ortocentro

$HM = MQ$
$HN = NP$
$HL = TL$

**TEOREMA DE CARNOT**

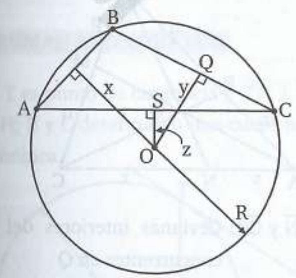
**1er CASO:** Triángulo acutángulo




Si: R y r son las medidas del circunradio e inradio.

$x + y + z = R + r$

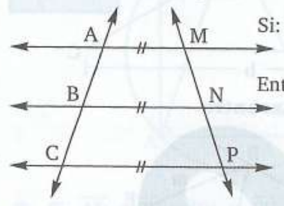
**2do CASO:** Triángulo obtusángulo




$x + y - z = R + r$

## PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

**TEOREMA DE TALES**



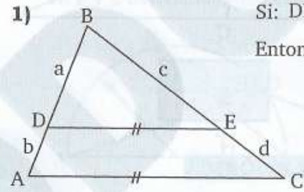

Si: $\overleftrightarrow{AM} // \overleftrightarrow{BN} // \overleftrightarrow{CP}$

Entonces:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

**Corolarios:**

**1)**

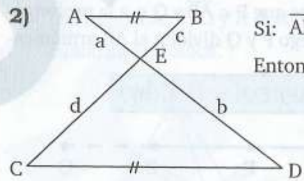



Si: $\overline{DE} // \overline{AC}$

Entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

**2)**



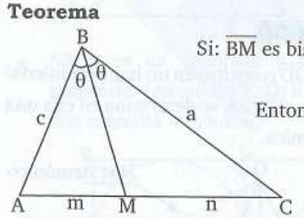

Si: $\overline{AB} // \overline{CD}$

Entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

**PROPIEDADES RELATIVAS A LA BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO**

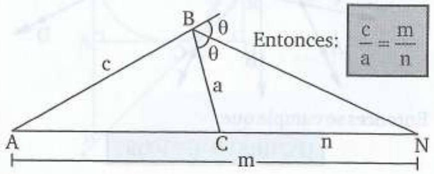
**Teorema**




Si: $\overline{BM}$ es bisectriz interior

Entonces: $\frac{c}{a} = \frac{m}{n}$

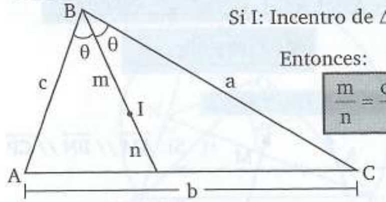
**Teorema**




Si: $\overline{BM}$ es bisectriz exterior

Entonces: $\frac{c}{a} = \frac{m}{n}$

**Teorema del Incentro**



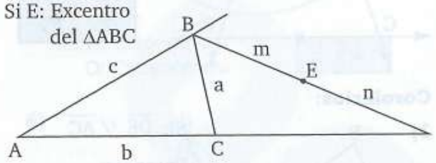

Si I: Incentro de ΔABC

Entonces:

$$\frac{m}{n}=\frac{c+a}{b}$$

**Teorema del Excentro**

Si E: Excentro del ΔABC




Entonces:

$$\frac{m}{n}=\frac{c-a}{b}$$

## CUATERNA ARMÓNICA

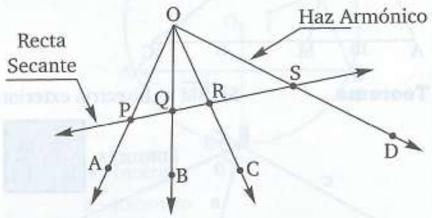
Dado el $\overline{AB}$ tales que $P \in \overline{AB}$ y Q ∈ a la prolongación de $\overline{AB}$, luego P y Q dividen al $\overline{AB}$ armónicamente si:

$$(AP)(BQ) = (AQ)(BP)$$


Donde: P y Q son los conjugados armónicos de A y B; además: A y B son los conjugados armónicos de P y Q.

## HAZ ARMÓNICO

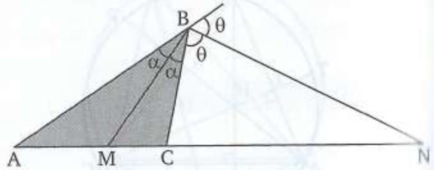
$\overline{OA}$; $\overline{OB}$; $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ constituyen un haz armónico si para toda recta secante, se determina en ella una cuaterna armónica.




Entonces se cumple que:

$$(PQ)(RS) = (PS)(QR)$$

## TEOREMA

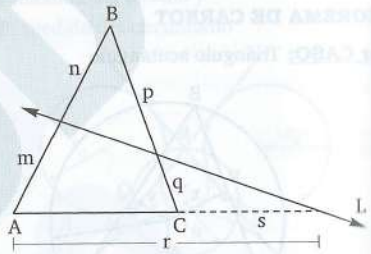



A – M – C – N: Forman una cuaterna armónica

Entonces:

$$\frac{AM}{MC}=\frac{AN}{CN} \quad o \quad (AM)(CN)=(MC)(AN)$$

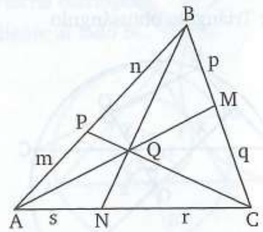
## TEOREMA DE MENELAO




$\overleftrightarrow{L}$ : Recta secante a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AC}$

$$mps = nqr$$

## TEOREMA DE CEVA



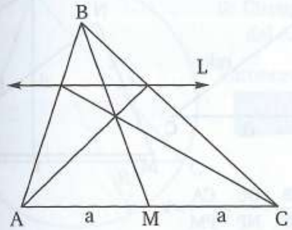

$\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$ : Cevianas interiores del ΔABC, concurrentes en Q

$$mpr = nqs$$





**Corolario**

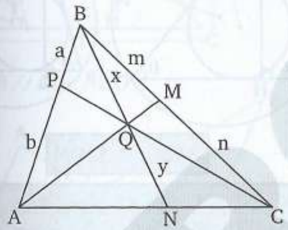



Si: $\overline{BM}$ es mediana

Entonces:

$$\overleftrightarrow{L} // \overline{AC}$$

## TEOREMA DE VAN AUBEL



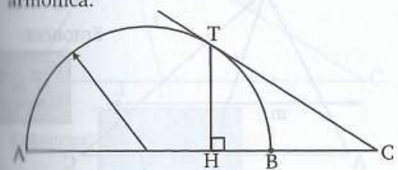

$\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$ : Cevianas interiores del ΔABC concurrentes en Q

Entonces:

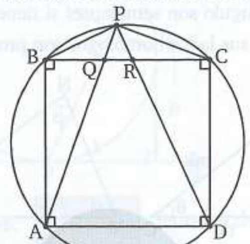
$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}+\frac{m}{n}$$

## TEOREMAS ADICIONALES

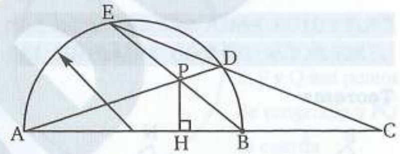
1. Si: T es punto de tangencia y $\overline{TH} \perp \overline{AB}$ A; H; B y C determinan una cuaterna armónica.



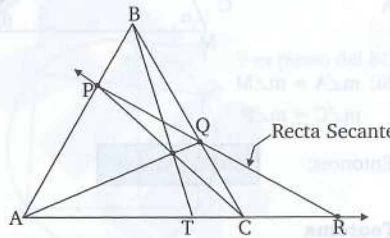

2. Si: ABCD es cuadrado y $P \in \overset{\frown}{BC}$ ; B; Q; R y C determinan una cuaterna armónica.



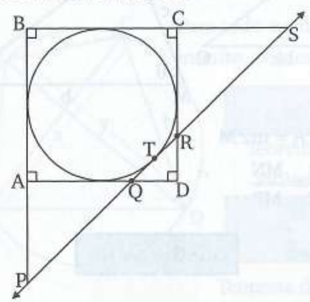

3. Si: $\overline{AD} \wedge \overline{EB} = \{P\}$ y $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ entonces A; H; B y C determinan una cuaterna armónica.




4. Los puntos A; T; C y R determinan una cuaterna armónica.

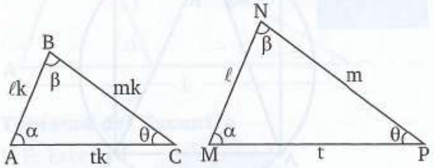



5. ABCD es un cuadrado y T es punto de tangencia. Los puntos P; Q; R y S determinan una cuaterna armónica.



## SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulo son semejantes si tienen la misma forma y sus lados homólogos son proporcionales

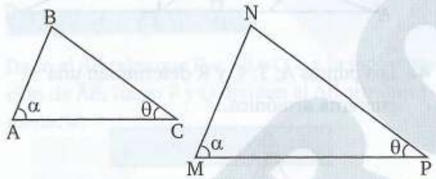


$\Delta ABC \sim \Delta MNP$

~: Se lee semejante

## CRITERIOS PARA ESTABLECER LA SEMEJANZA DE DOS TRIÁNGULOS

**Teorema**

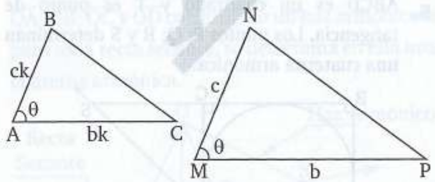


Si: $m\angle A = m\angle M$

$m\angle C = m\angle P$

Entonces: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$

**Teorema**

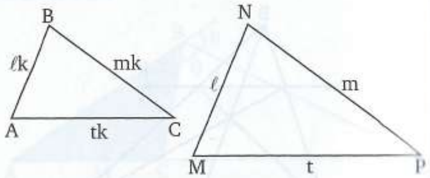


Si: $m\angle A = m\angle M$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$$

Entonces: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$

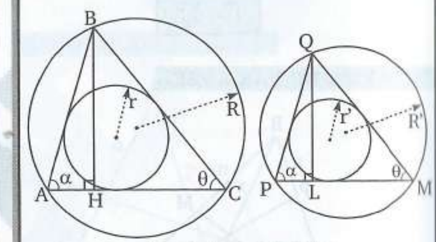
**Teorema**



Si: $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM} = k$

Entonces: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$

**NOTA**

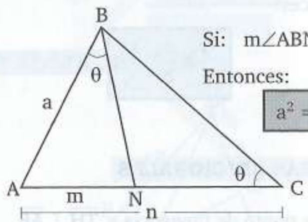


$\Delta ABC \sim \Delta PQM$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QM} = \frac{AC}{PM} = \frac{BH}{QL} = \frac{r}{r'} = \frac{R}{R'} = \frac{2p_{ABC}}{2p_{PQM}} = \ldots = k$$

## TEOREMAS

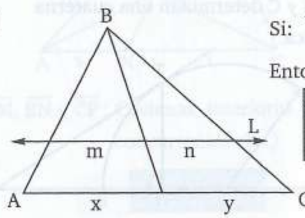
**1)**



Si: $m\angle ABN = m\angle C$

Entonces: $a^2 = m \cdot n$

**2)**



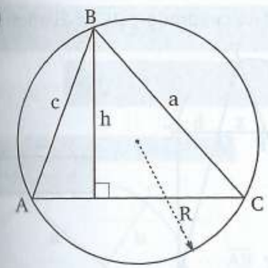
Si: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overline{AC}$

Entonces: $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$





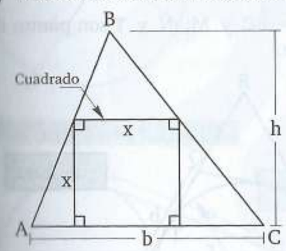
**3)**



R: Circunradio del $\Delta ABC$

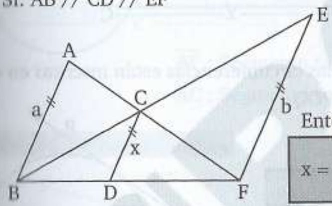
Entonces: $ac = 2Rh$

**4)** Lado del cuadrado inscrito en el triángulo



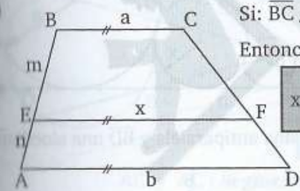
$$x = \frac{bh}{b+h}$$

**5)** Si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$



Entonces: $x = \frac{ab}{a+b}$

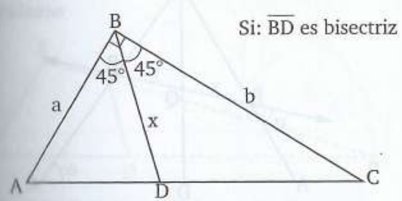
**6)**



Si: $\overline{BC} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{AD}$

Entonces: $x = \frac{an+bm}{n+m}$

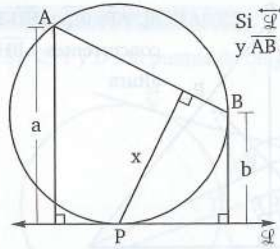
**7)**



Si: $\overline{BD}$ es bisectriz

Entonces: $x = \left(\frac{ab}{a+b}\right)\sqrt{2}$

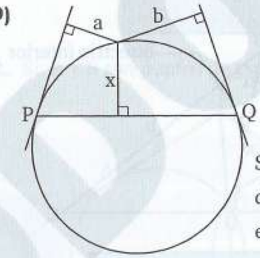
**8)**



Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es tangente y $\overline{AB}$ es cuerda

Entonces: $x = \sqrt{ab}$ Teorema de Pappus

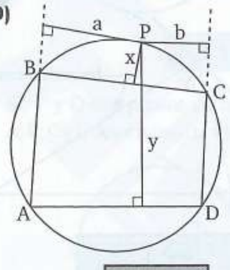
**9)**



Si P y Q son puntos de tangencia y $\overline{PQ}$ es cuerda

Entonces: $x^2 = ab$ Teorema de Pappus

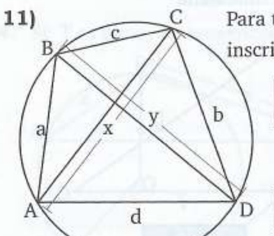
**10)**



P es punto del $\overset{\frown}{BC}$

Entonces: $ab = xy$ Teorema de Pappus

**11)**



Para todo cuadrilátero inscrito, se cumple:

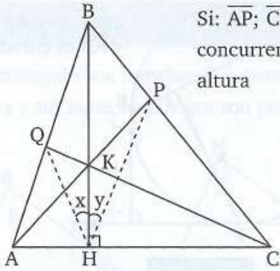
$xy = ab + cd$

Teorema de Ptolomeo

$$\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ac+bd}$$

Teorema de Viette

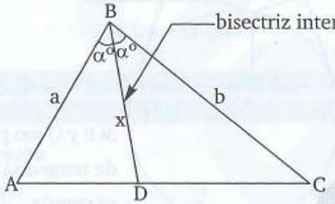
**12)**




Si: $\overline{AP}$; $\overline{CQ}$ y $\overline{BH}$ son concurrentes y $\overline{BH}$ es altura

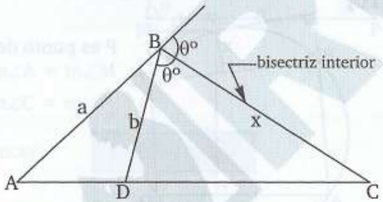
Entonces: $x = y$ Teorema de Blanchet

**13)**



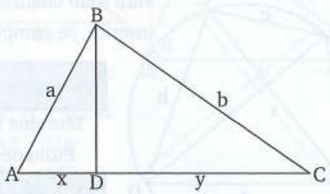

$$x = \left(\frac{2ab}{a+b}\right).\cos\alpha$$

**14)**



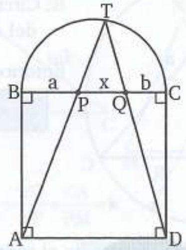

$$x = \left(\frac{2ab}{a-b}\right).\cos\alpha$$

**15)** Si: $\overline{BD}$ es una simediana



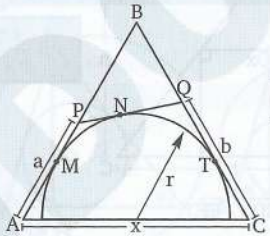

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2}$$

**16)** Si: ABCD es un cuadrado y $\overline{BC}$ es diámetro.



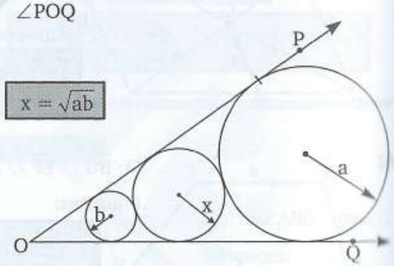

$x = \sqrt{ab}$

**17)** Si: AB = BC y M; N y T son puntos de tangencia.



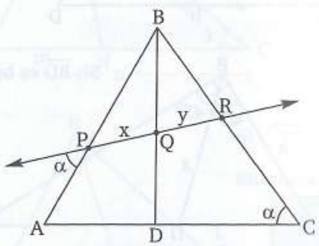

$x = 2\sqrt{ab}$

**18)** Si las circunferencias están inscritas en el ∠POQ




$x = \sqrt{ab}$

**19)** Si $\overline{PR}$ es una antiparalela y $\overline{BD}$ una sinediana.



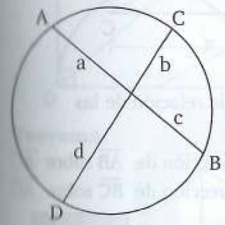

$x = y$





## RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

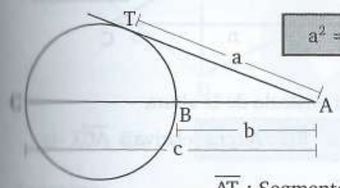
### Teorema de las cuerdas




$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ : cuerdas

$ac = bd$

### Teorema de la tangente

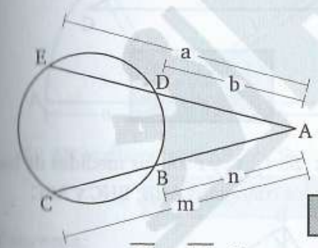



$a^2 = bc$

$\overline{AT}$ : Segmento tangente

$\overline{AC}$ : Segmento secante

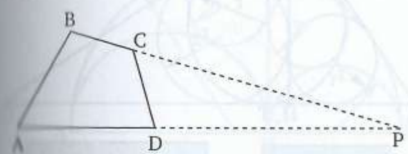
### Teorema de las secantes




$ab = mn$

$\overline{AE}$ y $\overline{AC}$ : Segmentos secantes

### Corolario

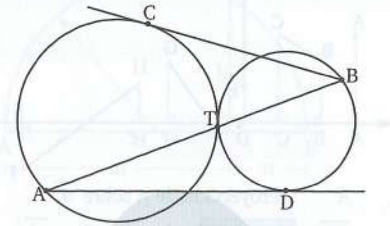



Si el ⏥ABCD es inscriptible se cumple:

$PB . PC = PA . PD$

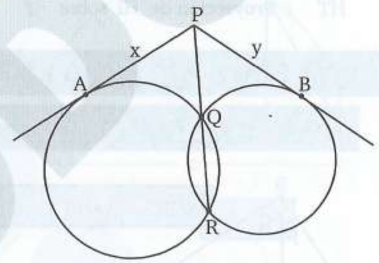
### TEOREMA ADICIONALES

**1.** Si: C; T y D son puntos de tangencia.



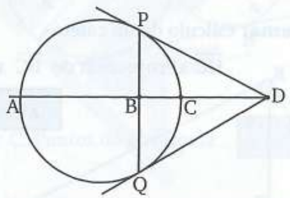

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AD)^2$$

**2.** Si: A y B son puntos de tangencia.

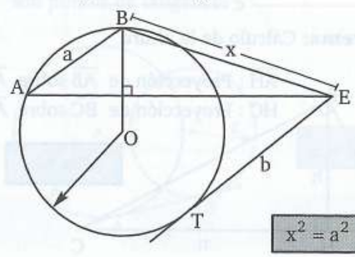



$x = y$

**3.** Si: P y Q son puntos de tangencia, los puntos A; B; C y D determinan una cuaterna armónica.

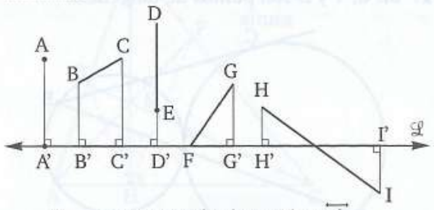



**4.** Si: T es punto de tangencia.




$x^2 = a^2 + b^2$

## PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UNA RECTA




A' : Proyección de A sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

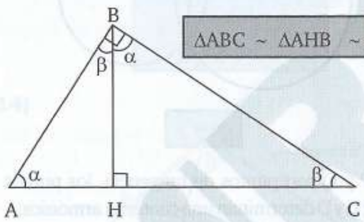
$\overline{B'C'}$ : Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

D' : Proyección de $\overline{DE}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\overline{FG'}$ : Proyección de $\overline{FG}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\overline{H'I'}$ : Proyección de $\overline{HI}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

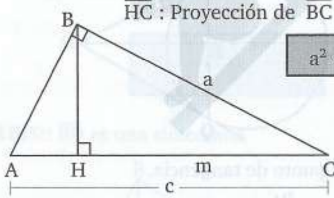
## RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO




$\Delta ABC \sim \Delta AHB \sim \Delta BHC$

**Teorema:** Cálculo de un cateto

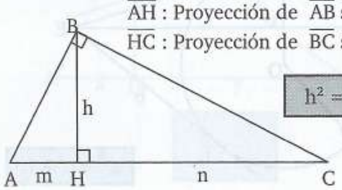
$\overline{HC}$ : Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$




$a^2 = cm$

**Teorema:** Cálculo de la altura

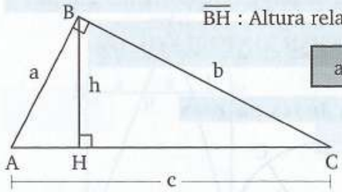
$\overline{AH}$ : Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$
$\overline{HC}$ : Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$




$h^2 = mn$

**Teorema:** Cálculo del producto de catetos

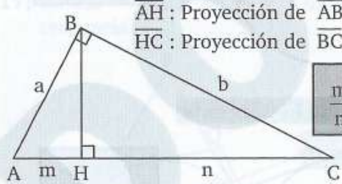
$\overline{BH}$ : Altura relativa a $\overline{AC}$




$ab = ch$

**Teorema:** Cálculo de la relación de las proyecciones

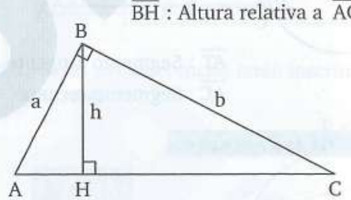
$\overline{AH}$ : Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$
$\overline{HC}$ : Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$




$\dfrac{m}{n} = \dfrac{a^2}{b^2}$

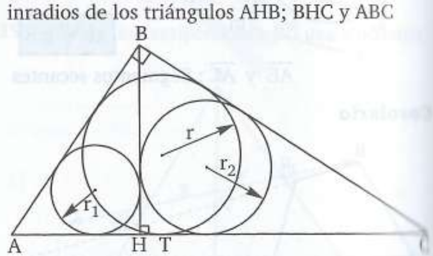
**Teorema:** Cálculo de la altura

$\overline{BH}$ : Altura relativa a $\overline{AC}$




$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

**Teorema:** Si: $r_1$; $r_2$ y r son las medidas de los inradios de los triángulos AHB; BHC y ABC




$HT = r_2 - r_1$

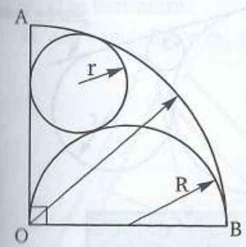
$r^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2$

$BH = r_1 + r_2 + r$



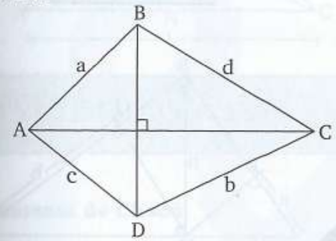


**Teorema:**



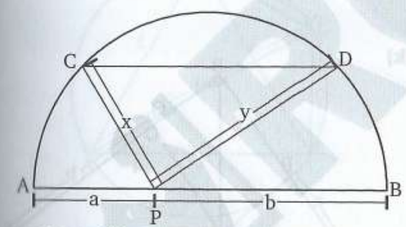

$R = 2r$

**Teorema:**




Si: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ → $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

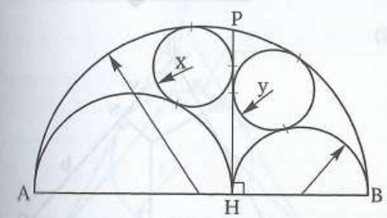
**Teorema:**




Si: AB es diámetro y AB // CD

→ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

**Teorema:**

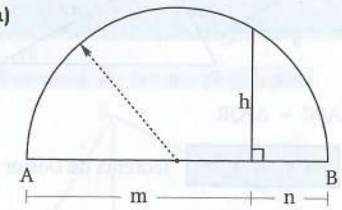



Si: AB es diámetro y PH ⊥ AB

→ $x = y$

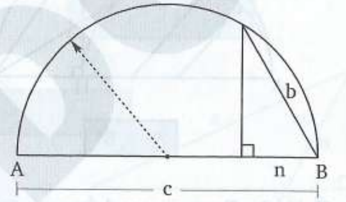
## TEOREMAS ADICIONALES

**a)**



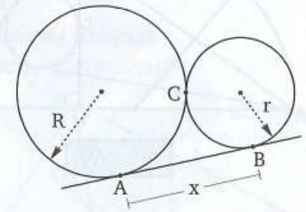

$\overline{AB}$ : Diámetro $h^2 = mn$

**b)**



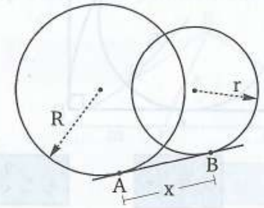

$\overline{AB}$ : Diámetro $b^2 = cn$

**c)**




A, B y C: Puntos de tangencia $x = 2\sqrt{Rr}$

**d)** Si las circunferencias son ortogonales, A y B son puntos de tangencia

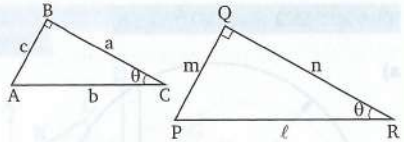



$x = \sqrt{2Rr}$




GEO PLANA

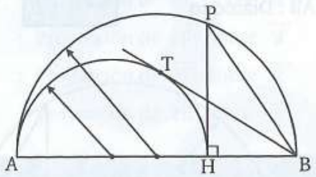
**e)**




Si: ΔABC ~ ΔPQR

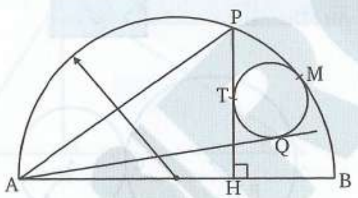
$an + cm = b\ell$ Teorema de Dostor

**f)** Si: T es punto de tangencia.



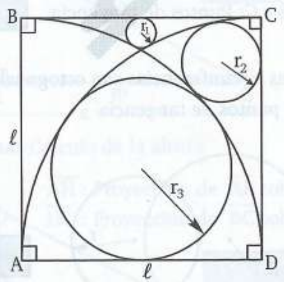

$PB = BT$

**g)** Si: M; Q y T son puntos de tangencia.



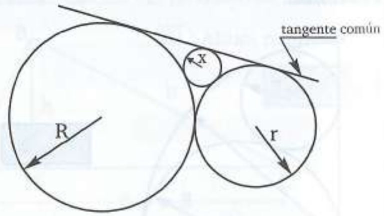

$AP = AQ$

**h)** ABOD en una cuadrado.



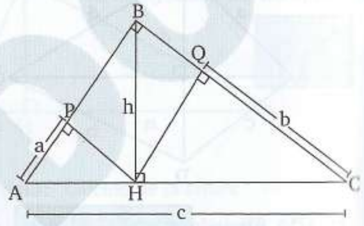

$r_1 = \frac{\ell}{16}$ $r_2 = \frac{\ell}{6}$ $r_3 = \frac{3\ell}{8}$

**i)**



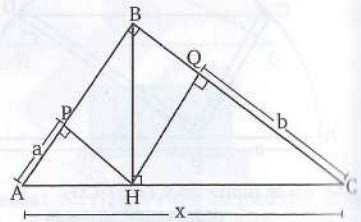

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}$$

**j)**



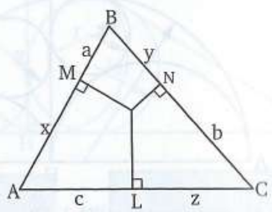

$h^3 = abc$

**k)**




$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}$$

**l)**




$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$

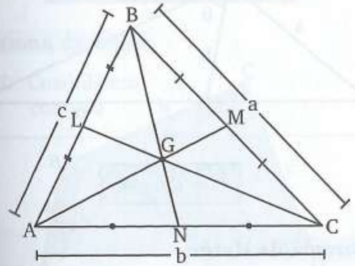




**m) Teorema de Booht**

Si: G es baricentro

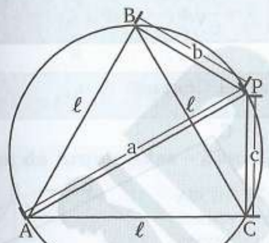
Si: $AM = m_a$; $BN = m_b$ y $CL = m_c$




$$\frac{(m_a)^2 + (m_b)^2 + (m_c)^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

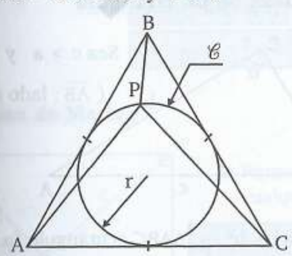
**n) Teorema de Chadú**

Si: AB = BC = AC y $P \in \overset{\frown}{BC}$




$a = b + c$ $a^2 + b^2 + c^2 = 2\ell^2$

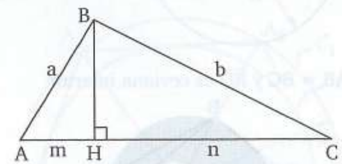
**o)** Si: AB = BC = AC y $P \in \mathscr{C}$




$(PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2 = 15r^2$

## RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

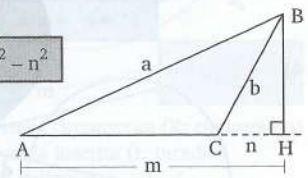
**Teorema de las proyecciones**




$\overline{AH}$ : Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$
$\overline{HC}$ : Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

$b^2 - a^2 = n^2 - m^2$

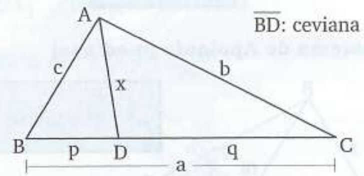
$a^2 - b^2 = m^2 - n^2$




$\overline{AH}$ : Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$
$\overline{HC}$ : Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

**Teorema de Stewart**

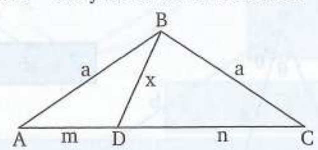
(cálculo de una ceviana)




$c^2q + b^2p = x^2a + pqa$

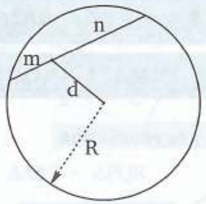
**Corolarios:**

**1)** Si AB = BC y $\overline{BD}$ es ceviana interior



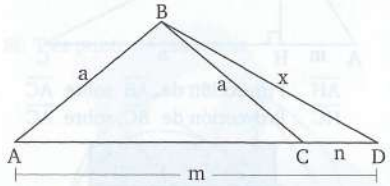

$x^2 = a^2 - mn$

**2)**



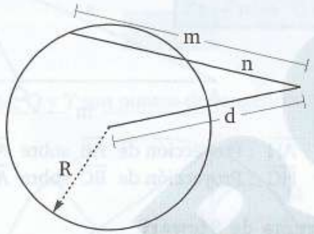
$mn = R^2 - d^2$

**3)** Si AB = BC y $\overline{BD}$ es ceviana interior



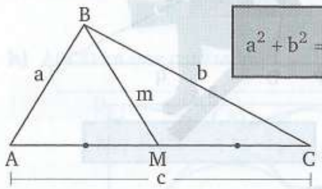
$x^2 = a^2 + mn$

**4)**



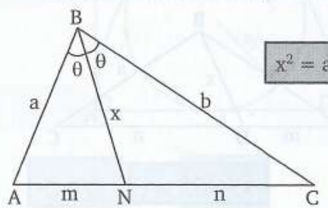
$mn = d^2 - R^2$

**Teorema de Apolonio (mediana)**



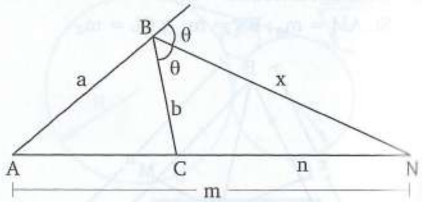
$a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{c^2}{2}$

**Teorema de la bisectriz (interior)**



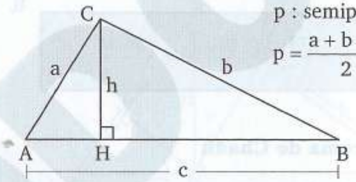
$x^2 = ab - mn$

**Teorema de la bisectriz (exterior)**



$x^2 = mn - ab$

**Teorema de Herón**

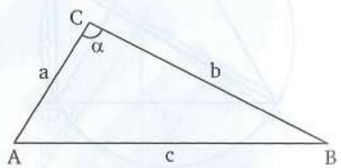


p : semiperímetro

$p = \frac{a+b+c}{2}$

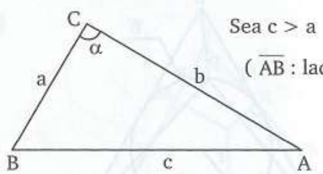
$h = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**Teorema del Coseno** $\forall \alpha$



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

**Naturaleza de un triángulo**



Sea $c > a$ y $c > b$

($\overline{AB}$ : lado mayor)

Si $c^2 < a^2 + b^2 \rightarrow \Delta ABC$ acutángulo ($\alpha < 90°$)

Si $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \Delta ABC$ rectángulo ($\alpha = 90°$)

Si $c^2 > a^2 + b^2 \rightarrow \Delta ABC$ obtusángulo ($\alpha > 90°$)

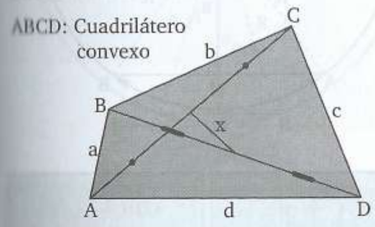




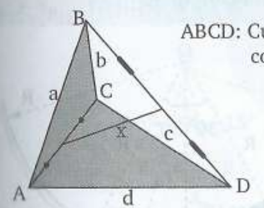
## RELACIONES MÉTRICAS EN CUADRILÁTEROS

**Teorema de Euler**

ABCD: Cuadrilátero convexo



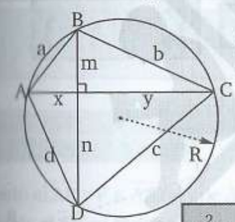
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4x^2$



ABCD: Cuadrilátero no convexo

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4x^2$

**Teorema de Arquímides - Faure**

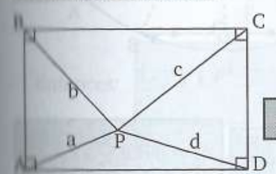


ABCD: Cuadrilátero inscrito de diagonales perpendiculares

$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2$

$x^2 + m^2 + y^2 + n^2 = 4R^2$

**Teorema de Marlen**

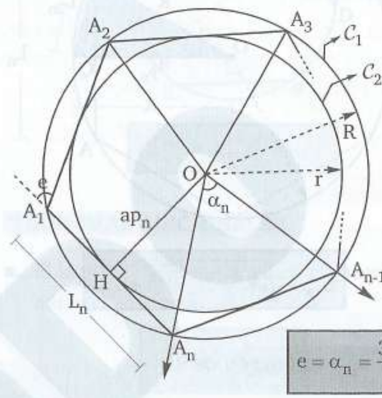


P: Punto cualquiera

$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

## POLÍGONO REGULAR

Polígono que es equiángulo y equilátero a la vez. Todo polígono regular es inscriptible y circunscriptible a dos circunferencias concéntricas.



$e = \alpha_n = \frac{360°}{n}$

$C_1$ : Circunferencia circunscrita (R: circunradio)

$C_2$ : Circunferencia inscrita (r: inradio)

O : Centro del polígono

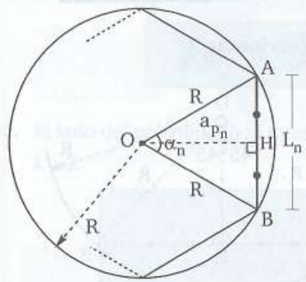
$L_n$ : Longitud del lado del polígono regular de "n" lados

$a_{p_n}$ : Longitud de la apotema del polígono regular de "n" lados

$\angle A_nOA_{n-1}$: Ángulo central del polígono regular

$\Delta A_2OA_3$ : Triángulo elemental

**Cálculo de "$L_n$" y "$a_{p_n}$"**



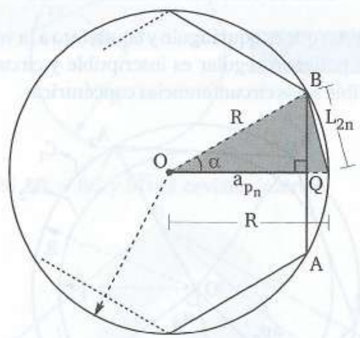
$\alpha_n = \frac{360°}{n}$

$L_n = R\sqrt{2 - 2\cos\alpha_n}$

$a_{p_n} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_n^2}$

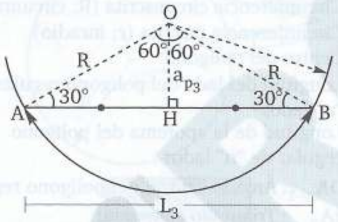
$a_{p_n} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + 2\cos\alpha_n}$

### Cálculo de "$L_{2n}$"



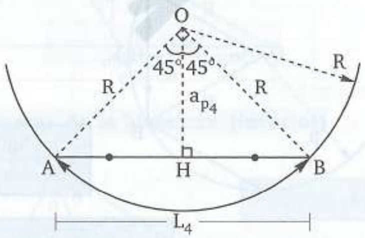
$$L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

### $L_3$ y $a_{p_3}$ en función de R



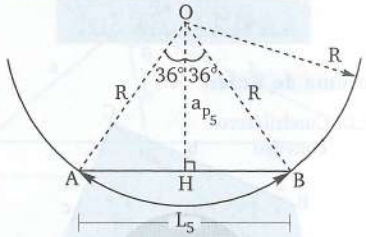
$AB = L_3 = R\sqrt{3}$ | $a_{p_3} = OH = \dfrac{R}{2}$

### $L_4$ y $a_{p_4}$ en función de R



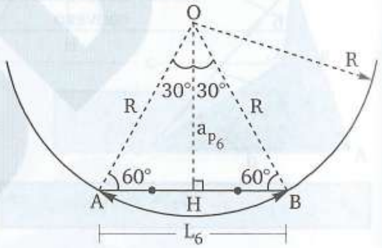
$L_4 = AB = R\sqrt{2}$ | $a_{p_4} = OH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

### $L_5$ y $a_{p_5}$ en función de R



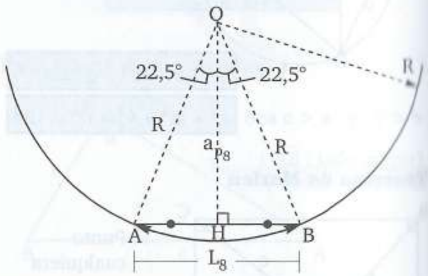
$L_5 = AB = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ | $a_{p_5} = OH = \dfrac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$

### $L_6$ y $a_{p_6}$ en función de R



$L_6 = AB = R$ | $a_{p_6} = OH = \dfrac{R}{2}\sqrt{3}$

### $L_8$ y $a_{p_8}$ en función de R

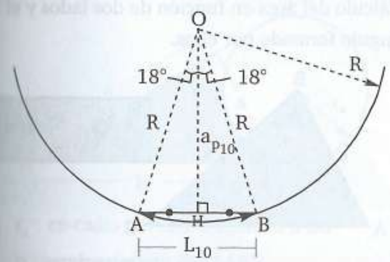


$L_8 = AB = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ | $a_{p_8} = OH = \dfrac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$



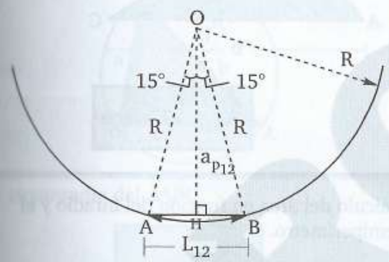


### $L_{10}$ y $a_{p_{10}}$ en función de R



$L_{10} = AB = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ | $a_{p_{10}} = OH = \dfrac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

### $L_{12}$ y $a_{p_{12}}$ en función de R



$L_{12} = AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ | $a_{p_{12}} = OH = \dfrac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

### DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Dado el $\overline{AB}$ y P ∈ $\overline{AB}$ tal que AB > PB, entonces P divide al $\overline{AB}$ en media y extrema razón si:

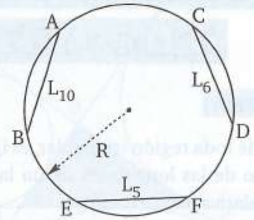
$$(AP)^2 = (AB)(PB)$$

Entonces: $AP = AB\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$

$\overline{AP}$ : Sección áurea de $\overline{AB}$

$\overline{PB}$ : Sección áurea de $\overline{AP}$

### TEOREMA



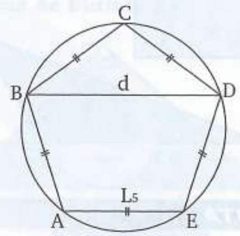
$$(L_5)^2 = (L_{10})^2 + (L_6)^2$$

### TEOREMAS ADICIONALES

**a.** El lado del decágono regular es la sección aúrea de su circunradio.

$$L_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

**b.** El lado del pentágono regular es la sección aúrea de una de sus diagonales.



$$L_5 = d\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

**c.** El lado del polígono de la forma $L_{2^k}$ donde $k \geq 2$.

$$L_{2^k} = R\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 ...}}}}}_{(k-1)\ \text{RADICALES}}$$

Ejemplo:

$L_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $L_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$;

$L_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}}$

# ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

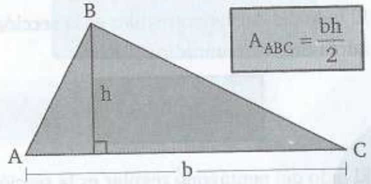
## TEOREMA

El área de toda región triangular, es igual al semi producto de las longitudes de un lado y por la altura relativa a dicho lado.

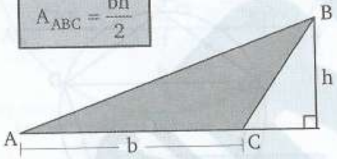
Sea $A_{ABC}$: Área de la región triangular ABC.

## TEOREMA FUNDAMENTAL

**Teorema:** Para toda región triangular



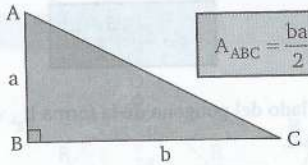

$$A_{ABC} = \frac{bh}{2}$$




$$A_{ABC} = \frac{bh}{2}$$

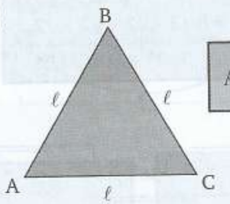
### NOTA

**1)**




$$A_{ABC} = \frac{ba}{2}$$

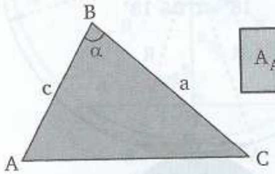
**2)**




$$A_{ABC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

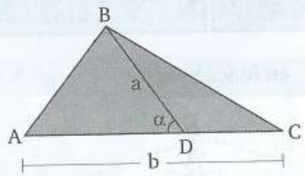
## TEOREMA TRIGONOMÉTRICO

Cálculo del área en función de dos lados y el ángulo formado por ellos.



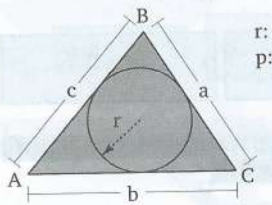

$$A_{ABC} = \frac{ac}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

### NOTA




$$A_{ABC} = \frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

Cálculo del área en función del inradio y el semiperímetro.



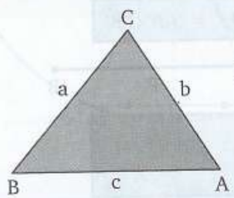

r: inradio de ΔABC

p: semiperímetro del ΔABC

$$A_{ABC} = pr$$

## TEOREMA DE HERÓN

Cálculo del área en función de los lados




p : semiperímetro

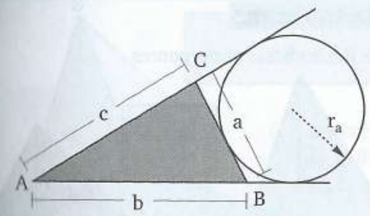
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$





Cálculo del área en función del exradio

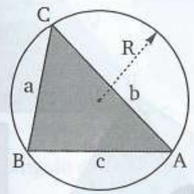



$r_a$ : ex-radio del ΔABC relativo a $\overline{BC}$

p : semiperímetro del ΔABC

$$A_{ABC} = r_a(p-a)$$

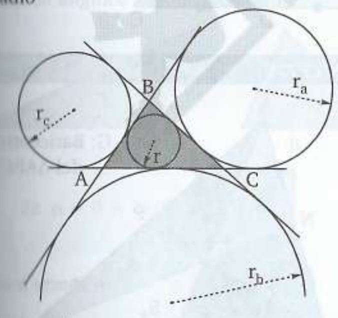
Cálculo del área en función del circunradio




R: circunradio del ΔABC

$$A_{ABC} = \frac{abc}{4R}$$

Cálculo del área en función de los exradios y el inradio



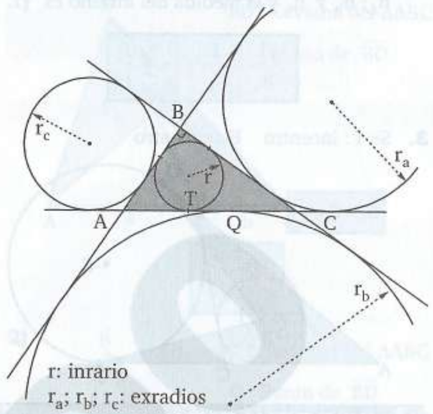

r: inradio

$r_a$; $r_b$; $r_c$: exradios

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$A_{ABC} = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

## Teoremas para el triángulo rectángulo




r: inradio

$r_a$; $r_b$; $r_c$: exradios

$$A_{ABC} = (AT)(TC)$$

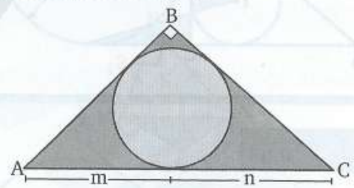
$$A_{ABC} = r \cdot r_b$$

$$A_{ABC} = (AQ)(QC)$$

$$A_{ABC} = r_a \cdot r_c$$

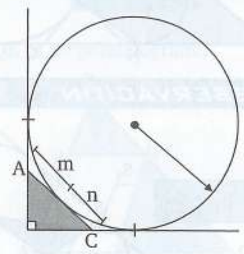
## TEOREMAS ADICIONALES

**1. Teorema de Burlet.**




S(ABC)=mn

### OBSERVACIÓN



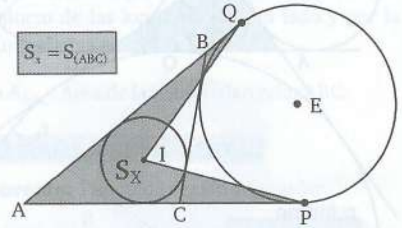

S(ABC)=mn

**2.** Si las alturas de un triángulo miden $h_a$; $h_b$ y $h_c$ y la medida del inradio es "r".

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

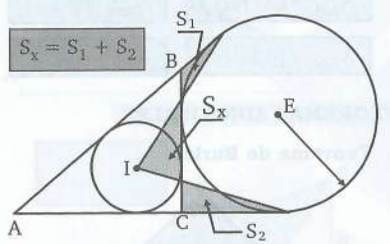
**3.** Si: I : incentro E : excentro

$$S_x = S_{(ABC)}$$

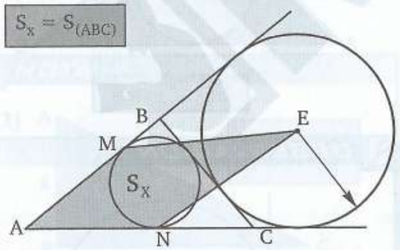



### OBSERVACIÓN

$$S_x = S_1 + S_2$$

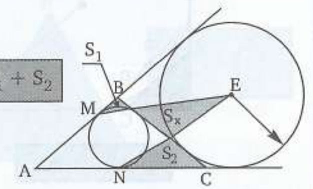



**4.** $S_x = S_{(ABC)}$




### OBSERVACIÓN

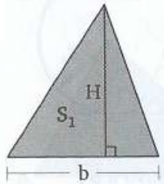
$$S_x = S_1 + S_2$$



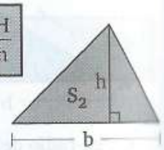

G E O P L A N A

## RELACIÓN ENTRE ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

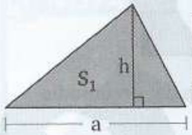
Si se tienen bases congruentes



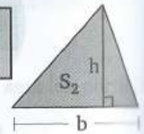

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{H}{h}$$




Si tienen alturas congruentes

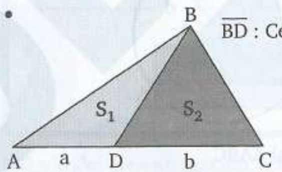



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$$




**Corolario**

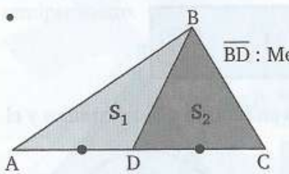
•




$\overline{BD}$ : Ceviana del ΔABC

$$\frac{S_1}{S_1}=\frac{a}{b}$$

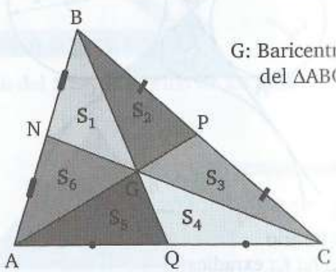
•




$\overline{BD}$ : Mediana del ΔABC

$$S_1 = S_2$$

### NOTA

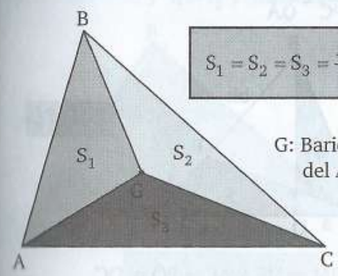



G: Baricentro del ΔABC

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{A_{ABC}}{6}$$



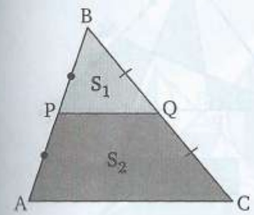





$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{A_{ABC}}{3}$$

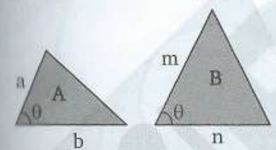
G: Baricentro del ΔABC

Si $\overline{PQ}$ es base media



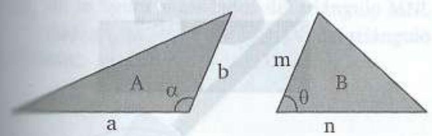

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$$

Si tienen un ángulo de igual medida




$$\frac{A}{B}=\frac{ab}{mn}$$

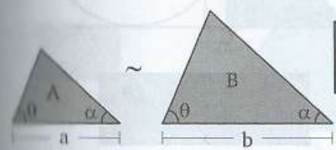
Si tienen ángulos suplementarios




Si: $\alpha + \theta = 180°$

$$\frac{A}{B}=\frac{ab}{mn}$$

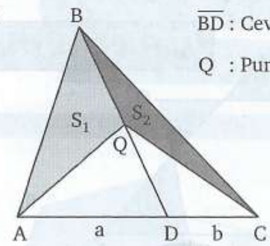
Si son semejantes




$$\frac{A}{B}=\frac{a^2}{b^2}$$

**Teoremas Adicionales**

**1)**

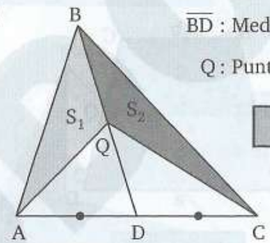



$\overline{BD}$ : Ceviana del ΔABC

Q : Punto de $\overline{BD}$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$$

**2)**

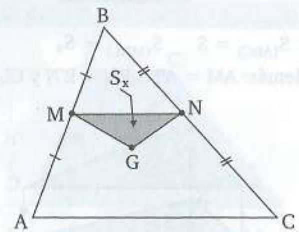



$\overline{BD}$ : Mediana del ΔABC

Q: Punto de $\overline{BD}$

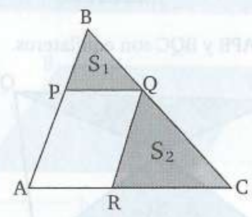
$$S_1 = S_2$$

**3.** G: Baricentro




$$S_x = \frac{S_{(ABC)}}{12}$$

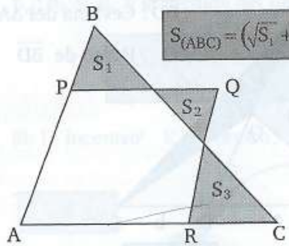
**4.** Si: APQR es un paralelogramo




$$S_{(ABC)} = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$$

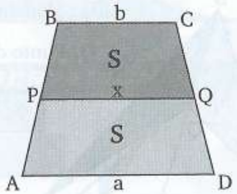
G E O P L A N A

**5.** Si: APQR es un paralelogramo



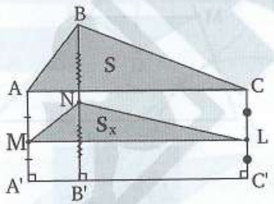

$S_{(ABC)} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$

**6.** Si las regiones trapeciales son equivalentes.
$S_{(ABCQ)} = S_{(APQD)}$



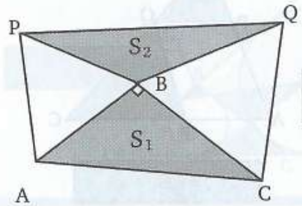

$x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$

**7.** Si: $S_{(ABC)} = S$ $\quad S_{(MNL)} = S_x$
Además: AM = A'M; BN = B'N y CL = C'L



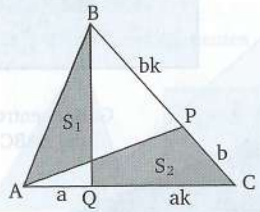

$S_x = \dfrac{S}{2}$

**8.** Si: APB y BQC son equilateros.



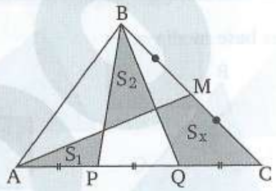

$\dfrac{S_1}{S_2} = 2$

**9.** Si: $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{CQ}{QA}$



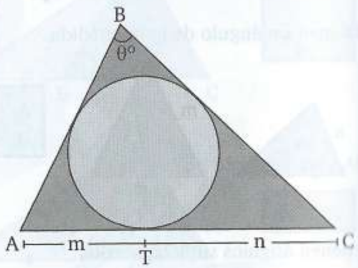

$S_1 = S_2$

**10.** Si: BM = MC y AP = PQ = QC



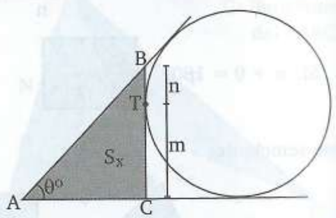

$S_x = S_1 + S_2$

**11.**




$S_{(ABC)} = m.n \cot\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

**12.**



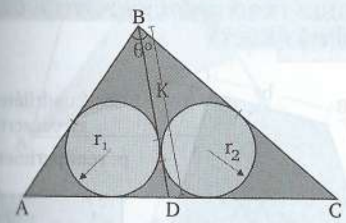

$S_{(ABC)} = m.n \cot\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$





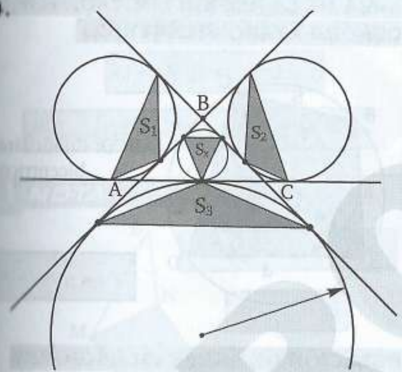


**13.** Si: BD = K; y $r_1 = r_2$ y $m\angle ABC = \theta$



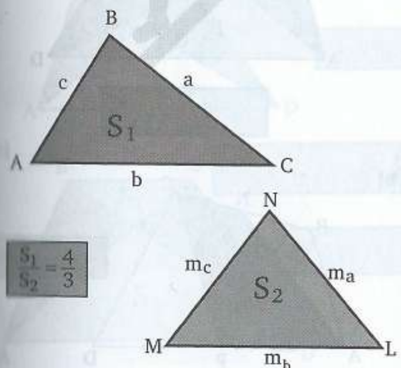

$S_{(ABC)} = K^2.\cot\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

**14.**




$\dfrac{1}{S_x} = \dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \dfrac{1}{S_3}$

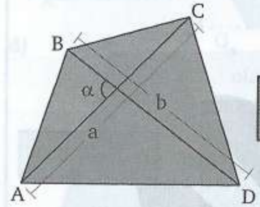
**15.** De la figura si los lados del triángulo MNL miden igual que las medianas del triángulo ABC.



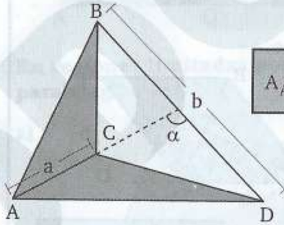

$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{4}{3}$

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

### FÓRMULA GENERAL (TRIGONOMÉTRICA)

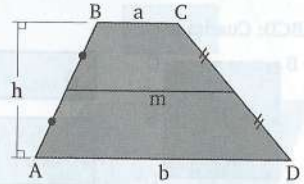



$A_{ABCD} = \dfrac{ab}{2} \operatorname{sen}\alpha$




$A_{ABCD} = \dfrac{ab}{2} \operatorname{sen}\alpha$

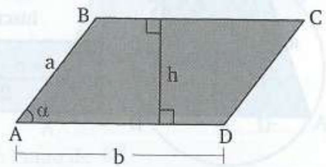
### ÁREA DE UNA REGIÓN TRAPECIAL




$A_{ABCD} = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)h$ $\quad A_{ABCD} = mh$

### ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRÁMICA

**Teorema**

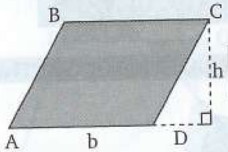



$A_{ABCD} = bh$ $\quad A_{ABCD} = ab \operatorname{sen}\alpha$

GEO PLANA

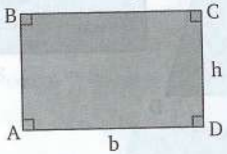
## NOTA

ABCD: Romboide



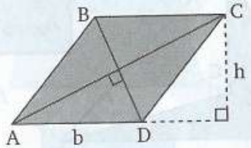

$A_{ABCD} = b \cdot h$

ABCD: Rectángulo



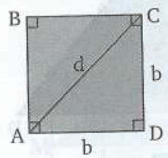

$A_{ABCD} = b \cdot h$

ABCD: Rombo




$A_{ABCD} = b \cdot h$ $\qquad A_{ABCD} = \dfrac{(AC)(BD)}{2}$

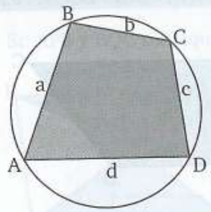
ABCD: Cuadrado




$A_{ABCD} = b^2$

$A_{ABCD} = \dfrac{d^2}{2}$

## ÁREA DE LA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO INSCRITO O INSCRIPTIBLE

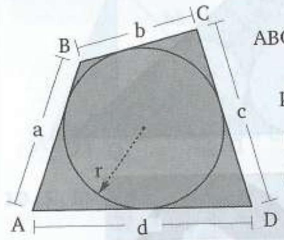



ABCD: Cuadrilátero inscrito o inscriptible

$p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

$A_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

## ÁREA DE LA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA

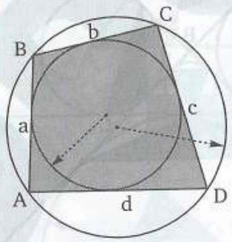



ABCD: Cuadrilátero circunscrito

p: semiperímetro

$A_{ABCD} = pr$

## ÁREA DE LA REGIÓN LIMITADA POR UN CUADRILÁTERO BICÉNTRICO



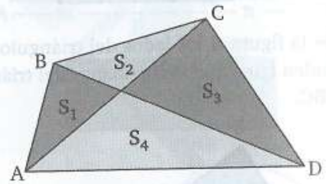

ABCD: Cuadrilátero bicentrico

$A_{ABCD} = \sqrt{abcd}$

## RELACIÓN DE ÁREAS EN REGIONES CUADRANGULARES

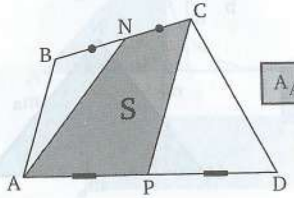
**En regiones limitadas por un trapezoide**

**a)**




$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

**b)**

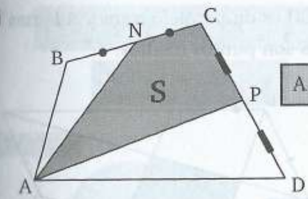



$A_{ABCD} = 2S$



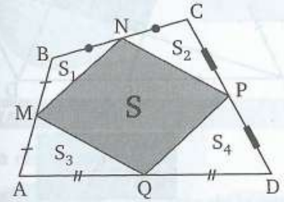


**c)**




$A_{ABCD} = 2S$

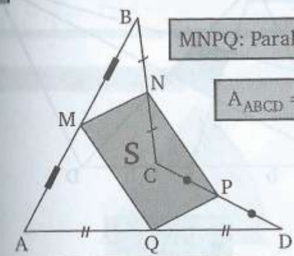
**d)**




MNPQ: Paralelogramo

$A_{ABCD} = 2S = 4(S_1 + S_4) = 4(S_2 + S_3)$

## NOTA

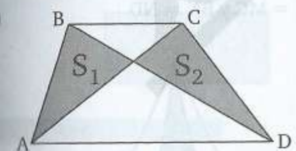



MNPQ: Paralelogramo

$A_{ABCD} = 2S$

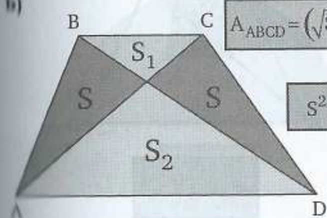
**En regiones limitadas por un trapecio**

**a)**




$S_1 = S_2$

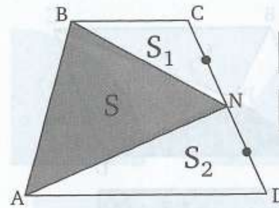
**b)**




$A_{ABCD} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$

$S^2 = S_1 \cdot S_2$

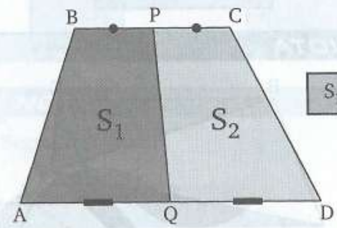
**c)**




$S = S_1 + S_2$

$A_{ABCD} = 2S$

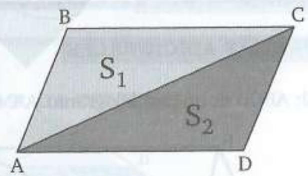
**d)**




$S_1 = S_2$

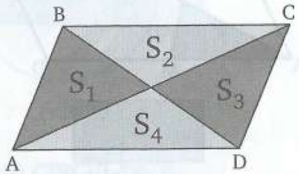
**En regiones limitadas por un paralelogramo**

**a)**



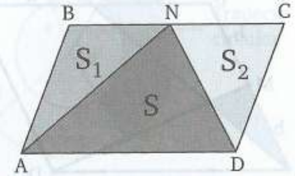

$S_1 = S_2$

**b)**




$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$

**c)**

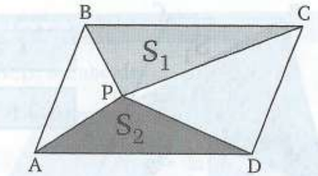



N: Punto de $\overline{BC}$

$A_{ABCD} = 2S$ $\qquad S = S_1 + S_2$

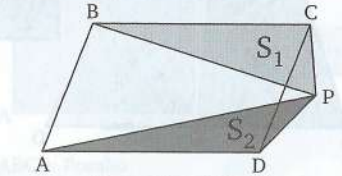
GEO PLANA

**d)**




$$A_{ABCD} = 2(S_1 + S_2)$$

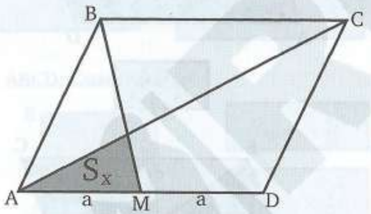
**NOTA**




$$A_{ABCD} = 2(S_1 + S_2)$$

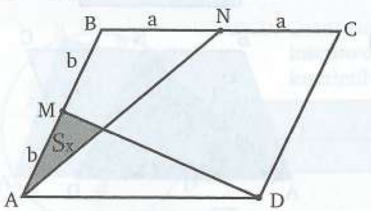
## TEOREMAS ADICIONALES

1. Si: ABCD es un paralelogramo y AM = MD.



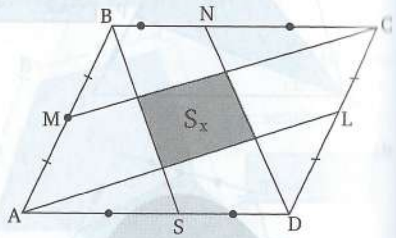

$$S_x = \frac{S_{(ABCD)}}{12}$$

2. Si: ABCD es un paralelogramo y AM = MB; BN = NC.



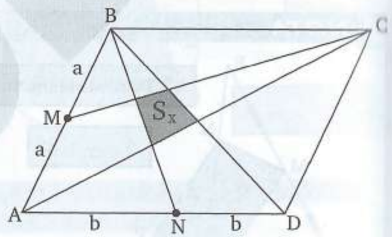

$$S_x = \frac{S_{(ABCD)}}{20}$$

3. Si: ABCD es un paralelogramo. Ademas M; N; L y S son puntos medios.



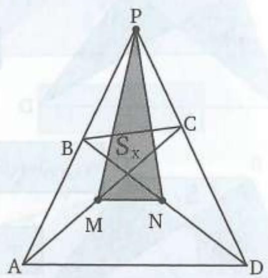

$$S_x = \frac{S_{(ABCD)}}{5}$$

4. Si: ABCD es un paralelogramo, además si: AM = MB y AN = ND.




$$S_x = \frac{S_{(ABCD)}}{20}$$

5. Si: AM = MC y BN = ND



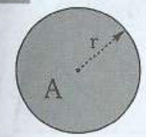

$$S_x = \frac{S_{(ABCD)}}{4}$$





## ÁREA DEL CÍRCULO Y SUS PARTES

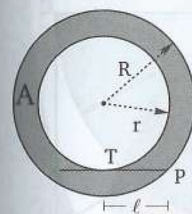
### CÍRCULO




$$A = \pi r^2$$

**NOTA**

Corona circular

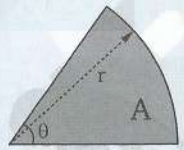



A: área de la corona
T: punto de contacto

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

$$A = \pi \ell^2$$

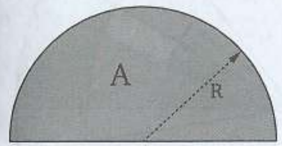
### SECTOR CIRCULAR



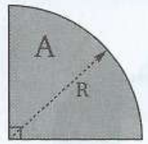

θ: Medida del ángulo central
A: área del sector circular

$$A = \left(\frac{\theta}{360°}\right)\pi r^2$$

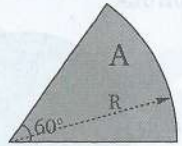
### CASOS PARTICULARES




$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

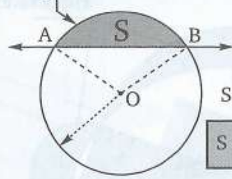



$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$




$$A = \frac{\pi R^2}{6}$$

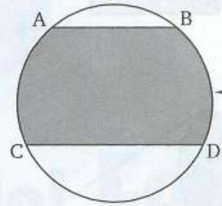
**NOTA**




S.C: Sector Circular

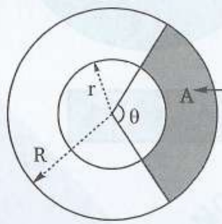
$$S = S_{S.C\,(AOB)} - S_{\Delta AOB}$$

### ZONA O FAJA CIRCULAR




$(\overline{AB} \parallel \overline{CD})$

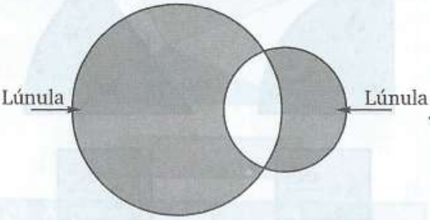
### TRAPECIO CIRCULAR



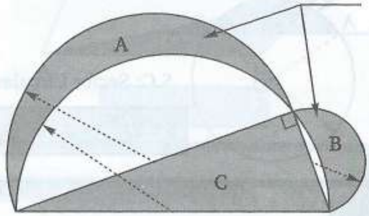

$$A = \left(\frac{\theta}{360°}\right)\pi(R^2 - r^2)$$

GEO PLANA

## LÚNULA

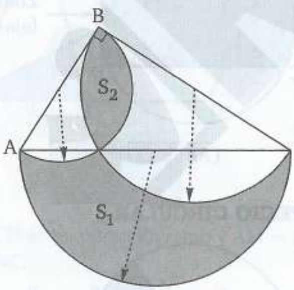



## TEOREMA




$$C = A + B$$

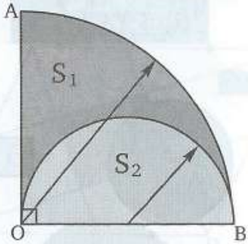
## TEOREMA




$$A_{ABC} = S_1 - S_2$$

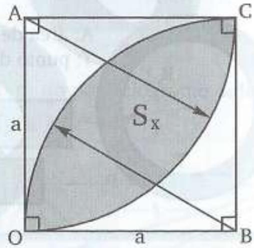
## TEOREMAS ADICIONALES

**1.**



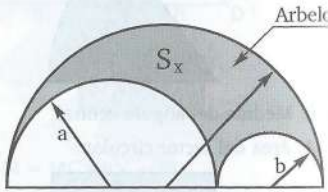

$$S_1 = S_2$$

**2.**



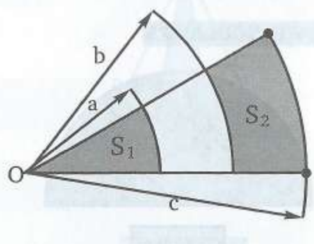

$$S_x = \frac{a^2}{2}(\pi - 2)$$

**3.**




$$S_x = \pi ab$$

**4.**




Si: $S_1 = S_2$ $\quad c^2 = a^2 + b^2$