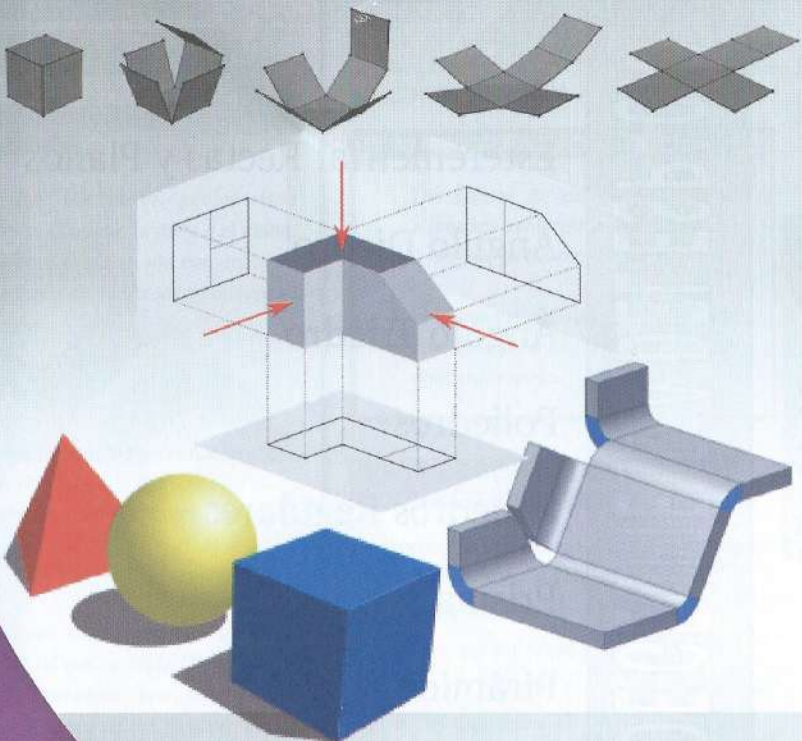
Resumen Teórico



Geometría del Espacio

FONDO EDITORIAL RODO

ÍNDICE

RESUMEN TEÓRICO DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO

ESTEREMETRÍA

RECTAS Y PLANOS

NOCIONES Y POSTULADOS FUNDAMENTALES

Recordemos que los entes geométricos fundamentales son el punto, la recta y el plano. Tanto la recta como el plano son conjuntos de puntos y el conjunto de todos los puntos es el *espacio geométrico*.

ESPACIO

Extensión indefinida y sin límites conocidos, que es el medio en el cual se hallan cuantas cosas existen en el universo y tiene naturaleza material.

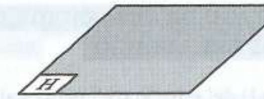
PLANO

La superficie plana o simplemente plano es aquella superficie tal que contiene íntegramente a la recta determinada por dos puntos cualesquiera de dicha superficie. La superficie de las aguas tranquilas, la de los espejos, la de las pizarras bien pulimentadas, etc; nos dan una idea aproximada de una porción de superficie plana. Y si la imaginamos extendida indefinidamente en todas direcciones, tenemos la idea de plano geométrico.

De la noción dada se deduce que el plano es ilimitado, pero en los dibujos se representa por medio de figuras limitadas, como regiones poligonales, circulares, etc. Frecuentemente se utilizan regiones paralelográmicas.

Notación:

Los planos se designan con una sola letra mayúscula y cuando sea necesario, para evitar confusiones, con dos o más.



▱H: Se lee plano H

OBSERVACIONES

- Los puntos de un conjunto están alineados o son colineales, si hay una recta que los contiene a todos.

- Los puntos de un conjunto son coplanarios, si hay un plano que los contiene a todos.

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DE UN PLANO

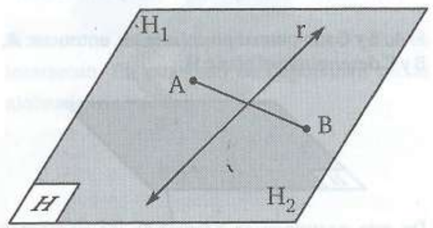
Una recta "r" de un plano H separa este plano en dos conjuntos de puntos H_1 y H_2 tales que:

a) $H_1 \cap H_2 = \varnothing$

b) H_1 y H_2 son convexos

c) Si $A \in H_1$ y $B \in H_2$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}$ interseca a $\overleftrightarrow{r}$



Cada uno de los conjuntos H_1 y H_2 se denominan semiplano.

La recta "r" se llama arista u origen de cada uno de los semiplanos.

H_1 y H_2 se llaman semiplanos opuestos.

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DEL ESPACIO

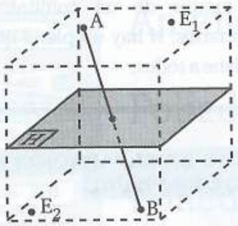
Un plano H del espacio tridimensional separa a este especio en dos conjuntos de puntos E_1 y E_2 tales que:

a) $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

b) E_1 y E_2 son convexos

c) Si $A \in E_1$ y $B \in E_2$

$\Rightarrow \overline{AB}$ interseca al plano H

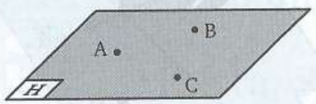


Cada uno de los conjuntos E_1 y E_2 se llama semiespacio. el plano H se denomina *cara* de cada uno de los semiespacios.

DETERMINACIÓN DE UN PLANO

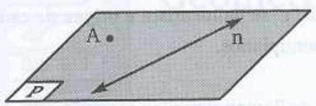
Postulado: Tres puntos no colineales determinan un único plano al cual pertenecen.

Si A, B y C son puntos no colineales, entonces: A, B y C determinan el plano H.



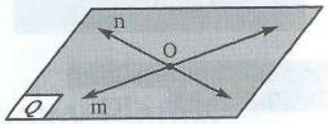
De este postulado se desprende los siguientes teoremas:

1. Una recta es un punto exterior a ella determinan un único plano, al cual pertenecen.



A y $\overleftrightarrow{n}$ determinan el plano P

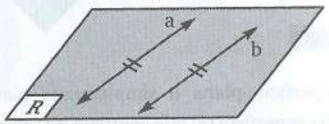
2. Dos rectas que se intersecan determinan un único plano, al cual pertenecen.



$\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ determinan el plano Q

Finalmente diremos que un plano queda determinado por dos rectas paralelas. Desde luego dos rectas paralelas están siempre situadas por definición en un mismo plano. Este es el único plano que las contiene, puesto que no hay más que un plano que pase por la primera y un punto de la segunda.

"Dos rectas paralelas determinan un único plano, al cual pertenecen".



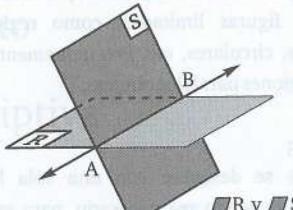
Si $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b}$ ellas determinan el plano R

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Posiciones relativas de dos planos

Dados dos planos del espacio:

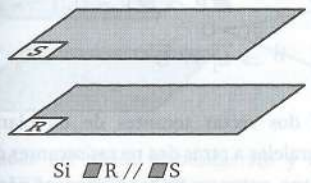
a) Son secantes, si tienen una recta en común, es decir, la intersección de dos planos secantes es una recta.



▱R y ▱S: secantes

$\Rightarrow$ ▱R $\cap$ ▱S = $\{\overleftrightarrow{AB}\}$

b) Son paralelos, si no se intersecan.



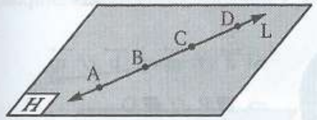
Si ▱R // ▱S

$\Rightarrow$ ▱R $\cap$ ▱S = $\varnothing$

Posiciones relativas entre una recta y un plano

Dadas una recta y un plano:

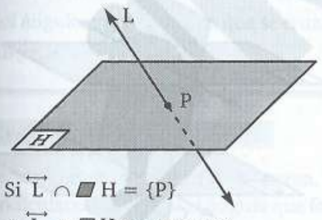
a) La recta está contenida en el plano si tiene todos sus puntos comunes con él.



Si $\overleftrightarrow{L} \subset$ ▱H

$\Rightarrow$ A; B; C; D; ... $\in$ ▱H

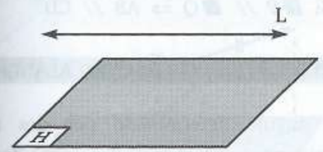
b) Son secantes, si se intersecan en un punto.



Si $\overleftrightarrow{L} \cap$ ▱H = {P}

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L}$ y ▱H son secantes

c) Son paralelos si no se intersecan.



Si $\overleftrightarrow{L}$ // ▱H

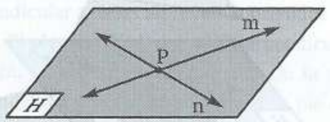
$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \cap$ ▱H = $\varnothing$

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Dos rectas en el espacio pueden pertenecer a un mismo plano (rectas coplanarias) o no pertenecer al mismo plano.

Si las rectas son coplanarias:

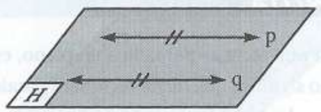
a) Son secantes, si su intersección es un punto.



$\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son secantes

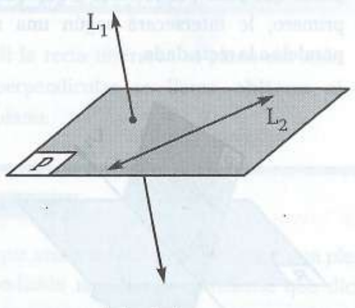
$\Rightarrow \overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \{P\}$

b) Son paralelos, si no se intersecan.



$\overleftrightarrow{p} // \overleftrightarrow{q} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{p} \cap \overleftrightarrow{q} = \varnothing$

Si las rectas no son coplanarias, entonces no se intersecan. En este caso de denominan rectas alabeadas o cruzadas.

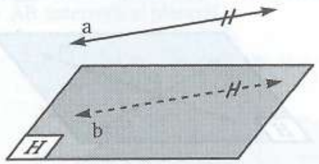


Así en la figura $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son rectas alabeadas

RECTA PARALELA A UN PLANO

Una recta es paralela a un plano cuando la recta y el plano no tiene ningún punto en común.

Para que una recta no contenida en un plano sea paralela a dicho plano, es condición necesaria y suficiente que dicha recta sea paralela a una recta que esté contenida en el plano.



Sea $\overleftrightarrow{a}$ una recta no contenida en el plano H

Si $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b}$ y $\overleftrightarrow{b} \subset$ ▱H

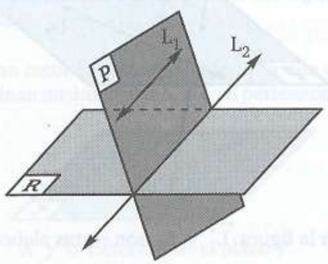
$\Rightarrow \overleftrightarrow{a}$ // ▱H

NOTA

Si una recta es paralela a un plano, esto no significa que dicha recta será paralela a todas las rectas del plano.

TEOREMAS SOBRE PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS

1. Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pase por al recta y que corte al primero, le intersecará según una recta paralela a la recta dada.

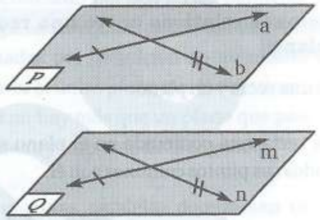


Si $\overleftrightarrow{L_1}$ // ▱R ; $\overleftrightarrow{L_1} \subset$ ▱P y

▱P $\cap$ ▱R = {$\overleftrightarrow{L_2}$}

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

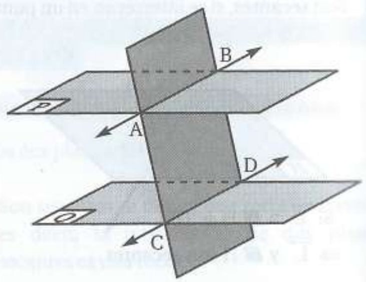
2. Si dos rectas secantes de un plano son paralelas a otras dos rectas secantes de otro plano, entonces ambos planos son paralelos.



Si $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{n}$

$\Rightarrow$ ▱P // ▱Q

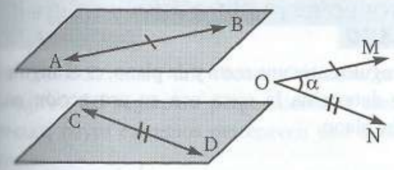
3. Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano, son paralelas.



Si ▱P // ▱Q $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

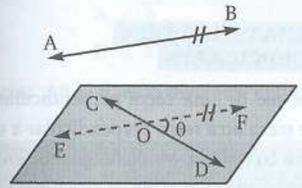
Es el ángulo determinado por dos rayos respectivamente paralelos a las rectas dadas y cuyo origen es un punto cualquiera del espacio.



Así, dadas las rectas alabeadas AB y CD, si $\overrightarrow{OM} // \overleftrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{ON} // \overleftrightarrow{CD}$, entonces "α" es la medida del ángulo entre las rectas que se cruzan AB y CD.

OBSERVACIÓN

El ángulo entre dos rectas alabeadas también se obtiene trazando la paralela a una de las rectas dadas por un punto cualquiera de la otra.

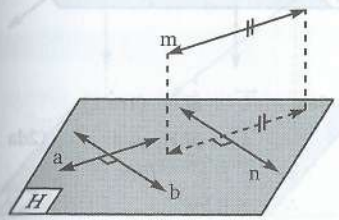


Si $\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{AB}$, entonces "θ" es la medida del ángulo entre las rectas que se cruzan AB y CD.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas que se intersecan o se cruzan, serán perpendiculares entre sí, si el ángulo que forman entre ellas es recto.

Así en la figura: $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{b}$ y $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$



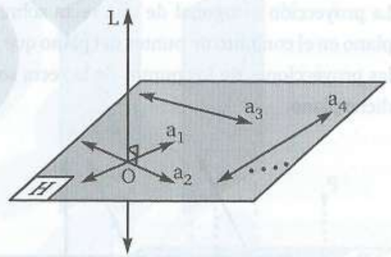
OBSERVACIÓN

En algunos cursos se usa el término **ortogonalidad** como sinónimo de perpendicularidad.

RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano. El plano se dice, a su vez, perpendicular a la recta. El punto de intersección de la recta perpendicular y el plano, se denomina pie de la perpendicular.

Así en la figura el punto "O" es el pie de la recta perpendicular L.



$\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱H, siempre y cuando:

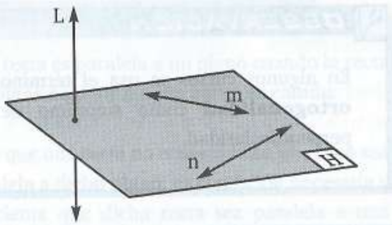
$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{a_1}$; $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{a_2}$; $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{a_3}$; ....

OBSERVACIÓN

Si la recta interseca al plano sin serle perpendicular se llama **oblicua** al plano.

TEOREMA

Para que una recta sea perpendicular a un plano es condición necesaria y suficiente que dicha recta sea perpendicular a dos rectas secantes del plano.



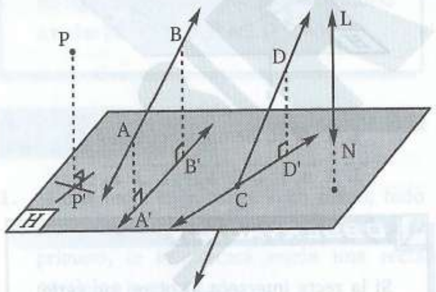
Sean m y n rectas no paralelas del plano H, si

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{n} \Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp$ ▱H

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO Y UNA RECTA SOBRE UN PLANO

La proyección ortogonal de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada de dicho punto hacia el plano.

La proyección ortogonal de una recta sobre un plano en el conjunto de puntos del plano que son las proyecciones de los puntos de la recta sobre dicho plano.



▱H: Plano de proyección

$\overline{PP'}$: Proyectante

P' : Proyección ortogonal de P sobre ▱H

$\overleftrightarrow{A'B'}$: Proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{AB}$ sobre ▱H

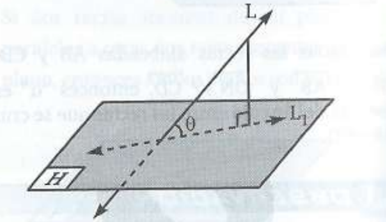
$\overline{CD'}$: Proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{CD}$ sobre ▱H

N : Proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{L}$ sobre ▱H

($\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱H)

ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

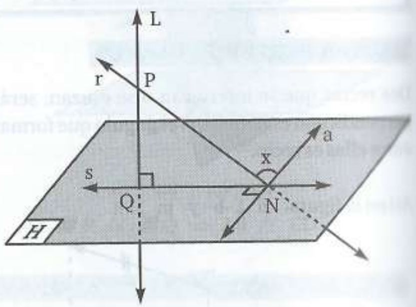
El ángulo entre una recta y un plano, es el ángulo que determina la recta con su proyección en dicho plano.



En la figura $\overleftrightarrow{L_1}$ es la proyección de $\overleftrightarrow{L}$ sobre el plano H, luego "θ" es la medida del ángulo entre la recta L y el plano H.

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Si por el pie de una recta perpendicular a un plano se traza otra recta perpendicular a una de las rectas contenida en dicho plano, entonces toda recta trazada por el pie de esta última recta y un punto cualquiera de la recta perpendicular al plano será perpendicular a la recta contenida en dicho plano.



Sea: $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱H (1ra ⊥)

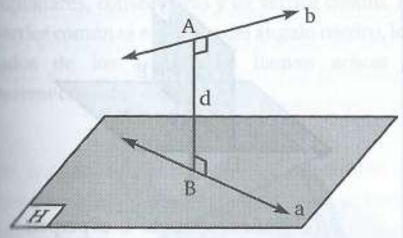
$\overleftrightarrow{a} \subset$ ▱H $\overleftrightarrow{s} \perp \overleftrightarrow{a}$ (2da ⊥)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{r} \perp \overleftrightarrow{a}$ (3ra ⊥)

$\therefore$ x = 90°

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

La distancia entre dos rectas alabeadas es la longitud del segmento perpendicular a ambas rectas, cuyos extremos pertenecen uno a cada recta.



Si: $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{a}$

$\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{b}$

$A \in \overleftrightarrow{b}$

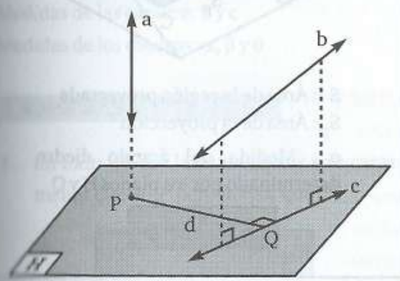
$B \in \overleftrightarrow{a}$

Entonces: AB = d, es la distancia entre $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$

MÉTODOS PARA CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

Primer método

Para calcular la distancia entre dos rectas alabeadas es recomendable fijar un plano perpendicular a una de las rectas, a éste se le denomina plano de proyección. Luego la distancia entre las proyecciones de las rectas dadas sobre dicho plano (distancia entre punto y recta) será la distancia buscada.



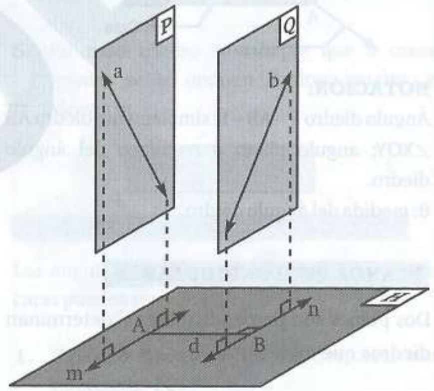
Sean $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ dos rectas alabeadas.

Si P (punto) y $\overleftrightarrow{c}$ son las proyecciones de $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ sobre ▱H. entonces:

PQ = d es la distancia entre $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$

Segundo método

Para calcular la distancia entre dos rectas alabeadas es recomendable fijar un plano perpendicular a los planos paralelos que contienen a estas rectas alabeadas. Dicho plano será llamado plano de proyección. Luego la distancia entre las proyecciones de las rectas dadas sobre dicho plano (distancia entre dos rectas paralelas) será la distancia buscada.



Sean $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ dos rectas alabeadas contenidas en los planos P y Q (▱P // ▱Q)

Sea H un plano perpendicular al plano Q.

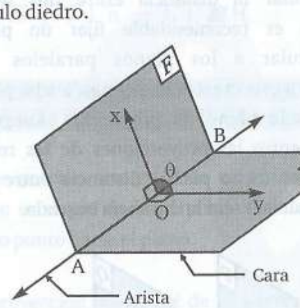
Si $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ ($\overleftrightarrow{m}$ // $\overleftrightarrow{n}$) son las proyecciones de $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ sobre ▱H, entonces:

AB = d, es la distancia entre $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$

ÁNGULO DIEDRO

DEFINICIÓN

Un ángulo diedro es la reunión de una recta y dos semiplanos no coplanarios que tienen dicha recta en común como origen. La recta se llama arista del diedro y la reunión de la arista con cualquiera de los semiplanos, es una cara del ángulo diedro.



NOTACIÓN:

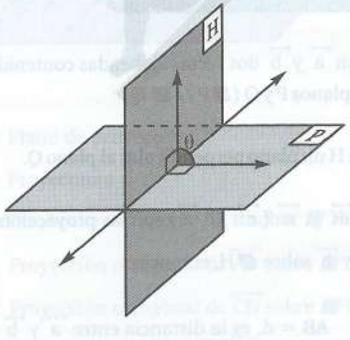
Ángulo diedro F – AB – H simplemente diedro $\overline{AB}$

∠XOY; ángulo plano o rectilíneo del ángulo diedro.

θ: medida del ángulo diedro.

PLANOS PERPENDICULARES

Dos planos son perpendiculares si determinan diedros que mide 90°.

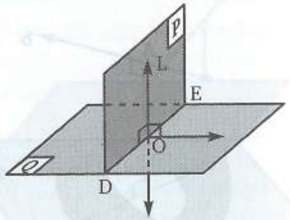


En la figura mostrada si θ = 90°, entonces:

▱H ⊥ ▱P

OBSERVACIONES

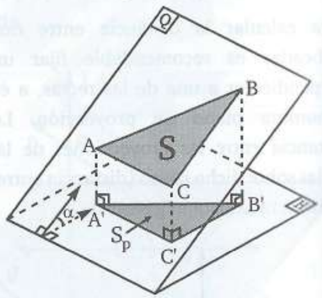
1. Si una recta es perpendicular a un plano, entonces todo plano que contenga a la recta será perpendicular al plano dado.



En el gráfico mostrado $\overleftrightarrow{L}$ es perpendicular al plano Q, en el punto "O" y P es un plano cualquiera que contiene a $\overleftrightarrow{L}$, entonces:

▱P ⊥ ▱Q

2. El área de la proyección ortogonal de una región plana sobre un plano es igual al producto del área de dicha región son el coseno del ángulo diedro, determinado por el plano que contiene a la región y el plano dado.



S : Área de la región proyectada

S_p : Área de la proyección

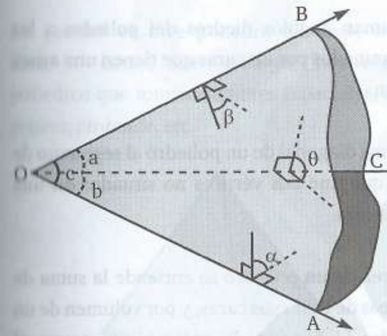
α : Medida del ángulo diedro determinado por los planos H y Q

$$S_p = S\cos\alpha$$

ÁNGULO TRIEDRO

DEFINICIÓN

Se llama ángulo triedro a la figura determinada por la reunión de tres regiones angulares no coplanares, consecutivas y de vértice común. El vértice común es el vértice del ángulo triedro, los lados de los ángulos se llaman aristas y pertenecen a dos caras.



ELEMENTOS:

Vértice : O

Aristas : $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$

Caras : AOB, BOC y AOC

Diedros : diedro $\overline{OA}$, diedro $\overline{OB}$ y diedro $\overline{OC}$

NOTACIÓN:

Ángulo triedro O – ABC o simplemente triedro O – ABC

Medidas de las caras: a, b y c

Medidas de los diedros: α, β y θ

TEOREMAS DE TRIEDRO

1. En todo triedro la suma de sus tres caras es menor que 360° pero mayor que 0°.

$$0 < a + b + c < 360$$

2. En todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.

$$b - c < a < b + c$$

3. En todo triedro se cumple que la suma de sus tres diedros está comprendida entre 180° y 540°

$$180 < \alpha + \beta + \theta < 540$$

4. En todo triedro se cumple que a mayor cara se le opone mayor diedro, y viceversa.

$$a > b \leftrightarrow \alpha > \beta$$

5. En todo triedro se cumple que a caras iguales se le oponen diedros iguales, y viceversa.

$$a = b \leftrightarrow \alpha = \beta$$

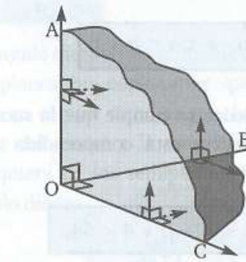
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIEDROS

Los ángulos triedros, según las medidas de sus caras pueden ser:

1. **Triedro Escaleno:** Si sus tres caras son diferentes.
2. **Triedro Isósceles o isoedro:** Si tiene dos caras congruentes.
3. **Triedro Equilátero:** Si sus tres caras son congruentes.
4. **Triedro Unirrectangular.** Si una cara mide 90°.
5. **Triedro Birrectangular.** Si tiene dos caras que miden 90° y los diedros opuestos miden 90°.

GEO ESPACIO

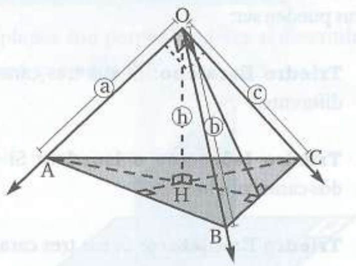
6. Triedro Trirrectangular: Si cada cara mide 90° y cada diedro mide 90°.



OBSERVACIÓN

1. Si por un punto interior a un triedro se trazan rayos perpendiculares a sus tres caras, el triedro determinado por dichos rayos es denominado **triedro polar o suplementario del triedro dado**, cumpliéndose que las caras de uno son suplementos de los diedros del otro.

2. Dado el triedro Trirrectangular de Vértice O y un plano secante a sus aristas en los puntos A, B y C si $\overline{OH} \perp \triangle ABC$, se cumple que:



- "H" es ortocentro del triángulo ABC
- $\boxed{\frac{1}{h_2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$
- $\boxed{(S_{ABC})^2 = (S_{AOB})^2 + (S_{BOC})^2 + (S_{AOC})^2}$

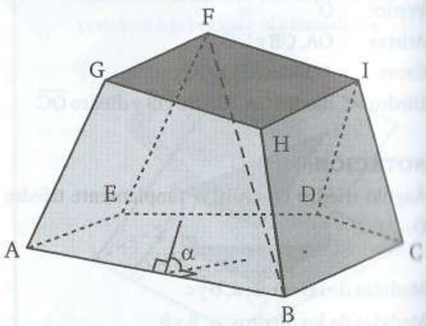
POLIEDROS

Se llama superficie poliédrica a la superficie no plana determinada por la reunión de cuatro o más regiones poligonales planas no coplanares de modo que cada par de regiones poligonales, llamadas *caras*, tienen en común a lo más un lado llamado *arista*. Un poliedro es la reunión de una superficie poliédrica con todos sus puntos interiores.

Se llaman ángulos diedros del poliedro a los determinados por las caras que tienen una arista común.

Se llama diagonal de un poliedro al segmento de recta que une dos vértices no situados en una misma cara.

Por área de un poliedro se entiende la suma de las áreas de todas sus caras, y por volumen de un poliedro la porción de espacio que ocupa el mismo.



ELEMENTOS:

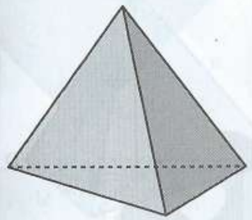
Vértice	: A, B, C, ...
Aristas	: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$
Caras	: AGHB, CDI, ...
Diedros	: Diedro $\overline{AB}$, ...
Diagonales	: $\overline{FB}$, $\overline{AI}$, ...

CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS

Atendiendo al número de caras un poliedro se llama:

Tetraedro,	si tiene 4 caras
Pentaedro,	si tiene 5 caras
Hexaedro,	si tiene 6 caras
Octaedro,	si tiene 8 caras
Dodecaedro,	si tiene 12 caras
Icosaedro,	si tiene 20 caras

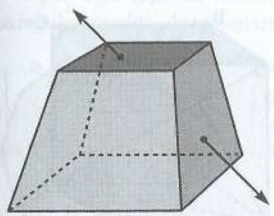
En general se dice poliedro de siete, nueve, diez, ... caras. Sin embargo, hay algunos poliedros que toman nombres especiales, como *prisma*, *pirámide*, etc.



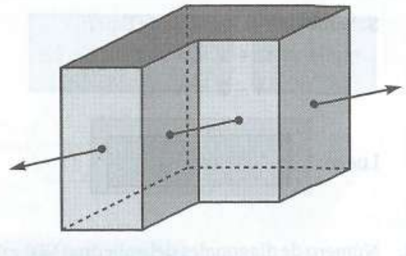
Tetraedro

En la figura se muestra un tetraedro, el poliedro de menor número de caras.

Un poliedro será convexo si una recta secante a su superficie determina en ella sólo dos puntos de intersección. Si la recta secante determina en la superficie poliédrica más de dos puntos de intersección, poliedro será no convexo.



Poliedro convexo



Poliedro no convexo

TEOREMA DE EULER

En todo poliedro convexo el número de caras aumentado en el de vértices es igual al número de aristas más 2. Si "C", "V" y "A" son los números de caras, de vértices y de aristas respectivamente de un poliedro convexo, entonces se cumple:

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

TEOREMAS

1. El número de aristas de cualquier poliedro es igual a la mitad del número total de lados de todas las caras.

   Es decir si un poliedro esta limitado por "x" polígonos de "n" lados, "y" polígonos de "m" lados y "z" polígonos de "r" lados, entonces, si "A" es el número de aristas, se cumple:

   $$\boxed{A = \frac{x \cdot n + y \cdot m + z \cdot r}{2}}$$

2. La suma "S" de las medidas de los ángulos de todas las caras de un poliedro convexo, esta dada por la siguiente expresión:

   $$\boxed{S = 360\,(A - C)}$$

GEO ESPACIO

Sabemos por el Teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$V - 2 = A - C$$

Luego: $\boxed{S = 360\,(V-2)}$

3. Número de diagonales del poliedro (ND):

$$\boxed{ND = C_2^V - A - \#\text{diagonales de las caras}}$$

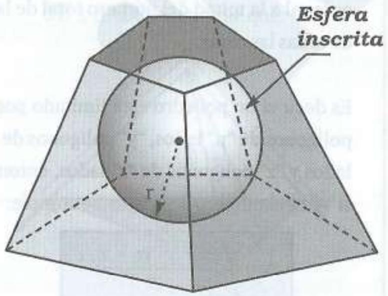
$$C_2^V = \frac{\lfloor V}{\lfloor V-2 \cdot \lfloor 2} = \frac{V(V-1)}{2}$$

4. Número de aristas (A):

n: # de lados que las caras tienen.

$$\boxed{A = \frac{n \cdot C}{2}}$$

5. Volumen de un poliedro circunscrito a una esfera.



$$\boxed{V_P = \frac{(S_{T_P}) \cdot (r)}{3}}$$

V_P : Volumen del poliedro
S_{T_P} : Área total del poliedro
r : Radio de la esfera inscrita

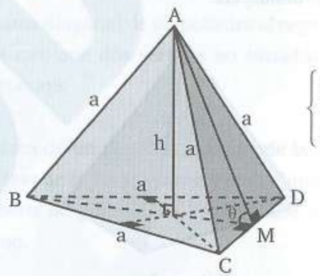
POLIEDROS REGULARES

Se llama poliedro regular al poliedro convexo cuyas caras son regiones limitadas por polígonos regulares congruentes, además en cada vértice concurren igual número de aristas.

Hay solamente cinco poliedros regulares, que son: el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Tetraedro regular

Está limitado por cuatro regiones triangulares equiláteras unidas de tres en tres.



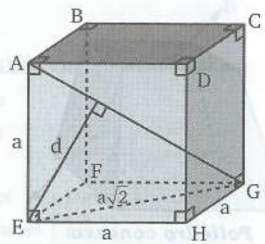
$$\left\{\begin{array}{l} C = 4 \\ V = 4 \\ A = 6 \end{array}\right.$$

$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}} \quad \boxed{S_T = a^2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

Hexaedro regular (cubo)

Esta limitado por seis regiones cuadradas unidas de tres en tres.



$$\left\{\begin{array}{l} C = 6 \\ V = 8 \\ A = 12 \end{array}\right.$$

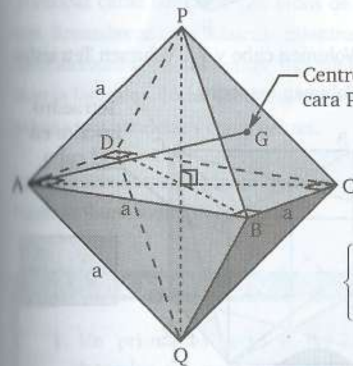
AG: Diagonal

$$\boxed{AG = a\sqrt{3}} \quad \boxed{S_T = 6a^2}$$

$$\boxed{V = a^3} \quad \boxed{d = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Octaedro regular

Esta limitado por ocho regiones triangulares equiláteras unidas de cuatro en cuatro.



$$\left\{\begin{array}{l} C = 8 \\ V = 6 \\ A = 12 \end{array}\right.$$

$$\boxed{PQ = a\sqrt{2}} \quad \boxed{S_T = 2a^2\sqrt{3}}$$

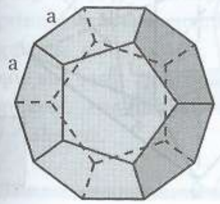
$$\boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}} \quad \boxed{AG = a}$$

$$\boxed{\text{Distancia entre dos caras opuestas} = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

$$\boxed{\text{Medida del diedro} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

Dodecaedro regular

Esta limitado por doce regiones limitadas por pentágonos regulares unidas de tres en tres.



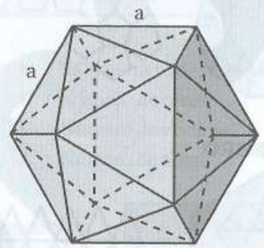
$$\left\{\begin{array}{l} C = 12 \\ V = 20 \\ A = 30 \end{array}\right.$$

$$\boxed{S_T = 15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} \quad \boxed{ND = 100}$$

$$\boxed{V = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}}$$

Icosaedro regular

Esta limitado por veinte regiones triangulares equiláteras unidas de cinco en cinco.



$$\left\{\begin{array}{l} C = 20 \\ V = 12 \\ A = 30 \end{array}\right.$$

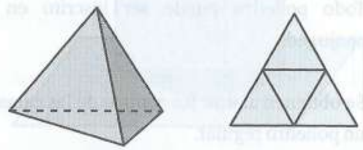
$$\boxed{S_T = 5a^2\sqrt{3}} \quad \boxed{ND = 36}$$

$$\boxed{V = \frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}}$$

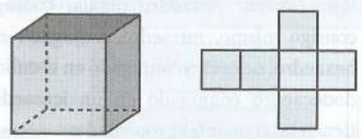
OBSERVACIÓN

Desarrollo de la superficie total de los poliedros regulares

TETRAEDRO

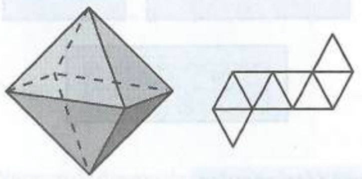


HEXAEDRO

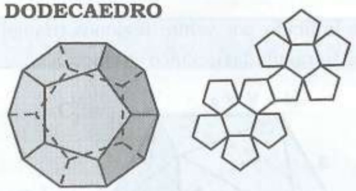


GEO ESPACIO

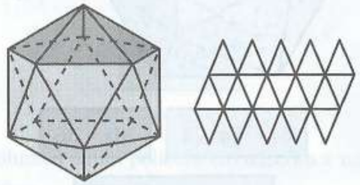
OCTAEDRO



DODECAEDRO



ICOSAEDRO



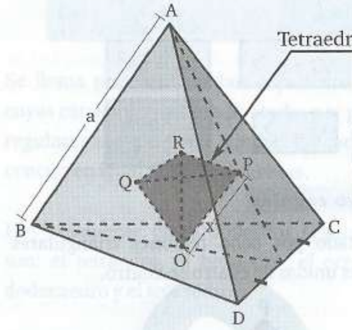
POLIEDROS CONJUGADOS

* Dos poliedros regulares son conjugados cuando el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro.

* Todo poliedro puede ser inscrito en su conjugado.

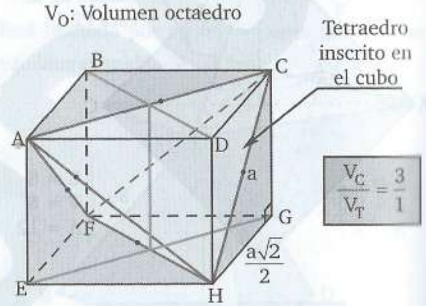
* Se obtienen al unir los centros de las caras de un poliedro regular.

* Solo existen: Tetraedro regular conjugado consigo mismo, tetraedro conjugado en el hexaedro, octaedro conjugado en el cubo y el dodecaedro conjugado en un icosaedro y tienen las siguientes propiedades:

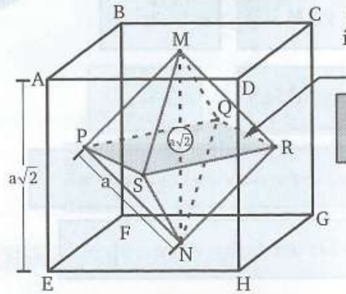


$$x = \frac{a}{3}$$

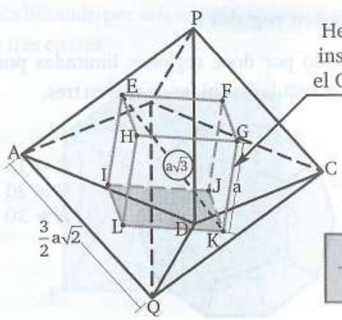
Sea: V_C: Volumen cubo y V_T: Volumen Tetraedro
V_O: Volumen octaedro



$$\frac{V_C}{V_T} = \frac{3}{1}$$



$$\frac{V_C}{V_O} = \frac{6}{1}$$



$$\frac{V_O}{V_C} = \frac{9}{2}$$

PRISMA

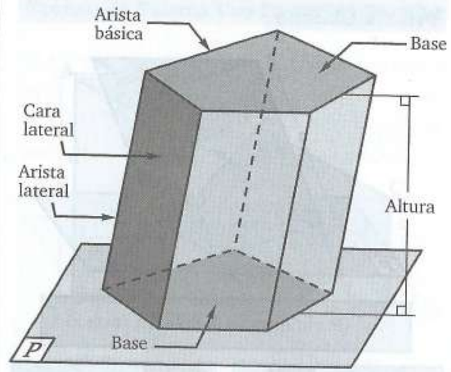
El prisma es un poliedro en donde dos de sus caras son regiones limitadas por polígonos congruentes situados en planos paralelos, y las demás caras son regiones paralelográmicas.

A las regiones poligonales paralelas se les llama bases del prisma, y a las regiones paralelográmicas caras laterales. Los lados de las bases son llamadas aristas básicas, mientras que las intersecciones de las caras laterales son las aristas laterales. Todas las aristas laterales de un prisma son paralelas y congruentes.

La distancia entre los planos que contienen a las bases se llama altura del prisma.

OBSERVACIÓN

1. Un prisma es recto si las aristas laterales son perpendiculares a las bases, en caso contrario será oblicuo.
2. En un prisma recto las caras laterales son regiones rectangulares.
3. Un prisma recto es regular si sus bases son regiones limitadas por polígonos regulares.
4. En todo prisma el número de lados de la base es igual al número de caras laterales.
5. Un prisma se denomina según el polígono que limita su base, así los prismas serán triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc, según que sus bases sean regiones triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.



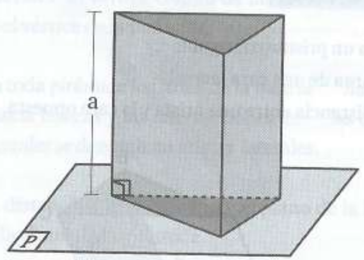
Si: n : Es el número de lados de la base
C : Número de caras
V : Número de vértices
A : Número de aristas

Entonces: $C = n + 2$

$V = 2n$

$A = 3n$

Prisma Recto



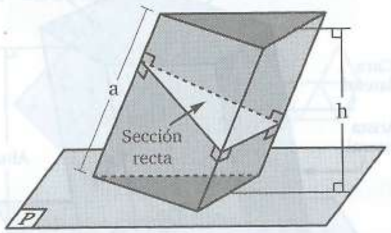
Sup. lateral: $S_L = (\text{Perímetro de la base}) \cdot a$

Sup. Total: $S_T = S_L + 2S_{BASE}$

Volumen: $V = (S_{BASE}) \cdot (\text{Altura})$

GEO ESPACIO

Prisma Oblicuo



S_L = (Perímetro de la sección recta) . a

$S_T = S_L + 2S_{BASE}$

$V = (S_{BASE}) . (Altura)$

$V = (S_{SECCIÓN\ RECTA}) . a$

Sumatoria de diedros = 360(n – 1)

n : Nº de lados de la base

OBSERVACIÓN

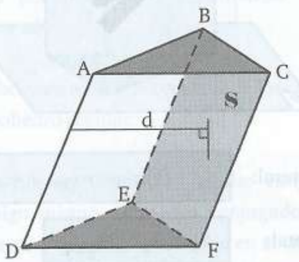
Se llama sección recta de un prisma a la sección determinada en el prisma por un plano perpendicular a las aristas laterales.

TEOREMA

Para un prisma triangular.

S: Área de una cara lateral.

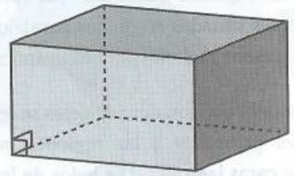
d: distancia entre una arista y la cara opuesta.



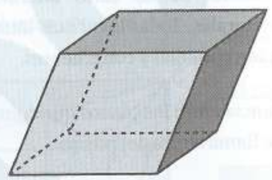
$Volumen = \frac{S \times d}{2}$

Paralelepípedo

Un paralelepípedo es un prisma cuya base es una región paralelográmica.

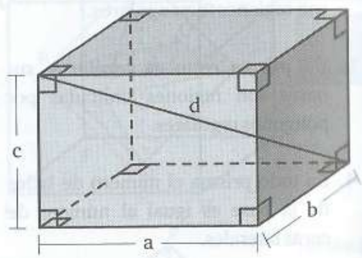


Paralelepípedo Recto



Paralelepípedo Oblicuo

Paralelepípedo Rectangular, Ortoedro o Rectoedro, es un paralelepípedo recto cuyas bases son regiones rectangulares. En estos paralelepípedos, las seis caras son regiones rectangulares.



d : Medida de la diagonal

a, b y c : Dimensiones de rectoedro

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

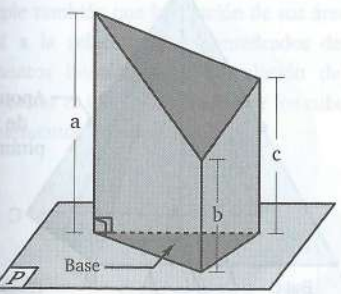
$S_T = 2(ab + bc + ac)$

$V = abc$

TRONCO DE PRISMA

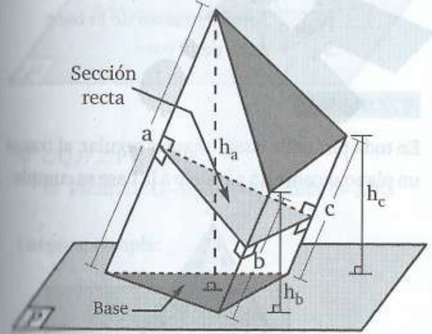
Es una porción de prisma que está comprendida entre una de sus bases y plano que no es paralelo a las bases y secante a todas sus aristas laterales.

Tronco de Prisma Triangular Recto



$V_{TRONCO} = S_{BASE} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

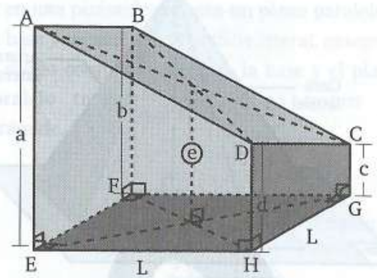
Tronco de Prisma Triangular Oblicuo



$V_{TRONCO} = S_{SEC.\ RECTA} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

$V_{TRONCO} = S_{BASE} \cdot \left(\frac{h_a+h_b+h_c}{3}\right)$

Tronco de Prisma Cuadrangular Regular



$a + c = b + d$

$4e = a + b + c + d$

$S_{LATERAL} = (4L)(e)$

$V_{TRONCO} = (L^2)(e)$

PIRÁMIDE

Una pirámide regular es un poliedro en donde una de sus caras es una región poligonal cualquiera y las otras son regiones triangulares con un vértice común. La cara que es una región poligonal cualquiera se llama base de la pirámide, y las otras, se denominan caras laterales. El vértice común de las caras laterales es el vértice de la pirámide.

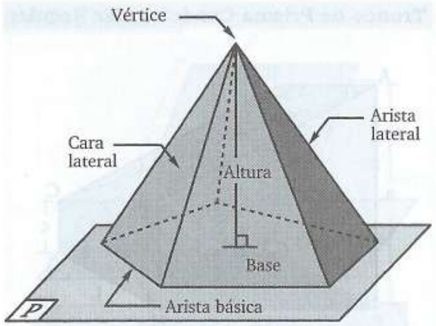
En toda pirámide los lados de la base se llaman aristas básicas y las intersecciones de las caras laterales se denominan aristas laterales.

La distancia entre el vértice y el plano de la base es la altura de la pirámide.

Una pirámide es triangular, cuadrangular, pentagonal, etc., según que su base sea una región triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.

El volumen de cualquier pirámide es igual a la tercera parte del área de su base por la altura.

GEO ESPACIO



$$V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3}(S_{BASE}).\ \text{Altura}$$

OBSERVACIONES

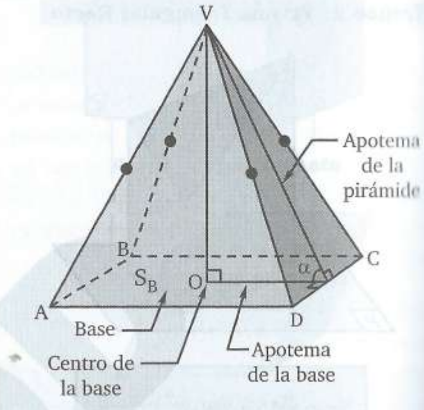
* Una pirámide es recta, si la altura cae en el centroide de la base. Caso contrario será una pirámide oblicua.
* Si las aristas laterales de una pirámide son congruentes, entonce la base limita a un polígono inscriptible, o sea la altura cae en el circuncentro de la base.
* Si las caras laterales forman el mismo diedro con la base, entonces la base limita un polígono circunscriptible, o sea la altura cae en el incentro de la base.

PIRÁMIDE REGULAR

Una pirámide es regular si la base es una región poligonal regular que tiene como centro el pie de la perpendicular trazada desde el vértice a la base.

Siendo la base una región poligonal regular, su centro equidista de los vértices del polígono base, y por consiguiente, las arista laterales de la pirámide son todas congruentes. De aquí resulta que las caras laterales de una pirámide regular son regiones limitadas por triángulos isósceles congruentes.

Se llama apotema de una pirámide regular al segmento que une el vértice de la pirámide con el punto medio de cualquiera de sus aristas básicas. Este apotema no es sino la altura de una cualquiera de las caras laterales.

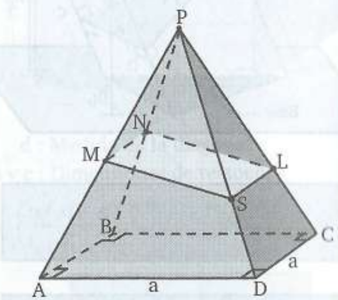


$$S_L = (P_{base})\ .\ A_P \qquad S_B = S_L\ .\ \cos\alpha$$

Donde:
S_L : Área de la superficie lateral
A_P : Apotema de la pirámide
P_{base} : Semiperímetro de la base
S_B : Área de la base

TEOREMA

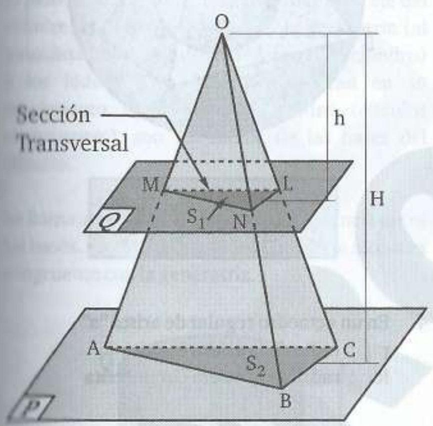
En toda pirámide cuadrangular regular, al trazar un plano secante no paralelo a la base se cumple:



$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PL} = \frac{1}{PN} + \frac{1}{PS}$$

PIRÁMIDES SEMEJANTES

Si en una pirámide se traza un plano paralelo a la base y secante a la superficie lateral, entonces la pirámide parcial determinada será semejante a la pirámide original, cumpliéndose que todos sus elementos homólogos son proporcionales; se cumple también que la relación de sus áreas es igual a la relación de los cuadrados de sus elementos homólogos, y la relación de sus volúmenes es igual a la relación de los cubos de sus elementos homólogos.



Si $\square Q // \square P$

$\Rightarrow$ Pirámide O–MNL ~ Pirámide O–ABC

Luego se cumple:

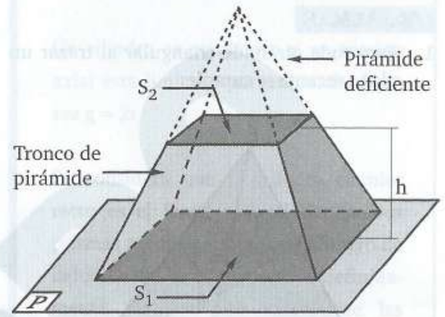
1. $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{NL}{BC} = \dfrac{h}{H} = ... = k$

2. $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{OM^2}{OA^2} = \dfrac{NL^2}{BC^2} = \dfrac{h^2}{H^2} = ... = k^2$

3. $\dfrac{V_{(O-MNL)}}{V_{(O-ABC)}} = \dfrac{OM^3}{OA^3} = \dfrac{h^3}{H^3} = ... = k^3$

TRONCO DE PIRÁMIDE

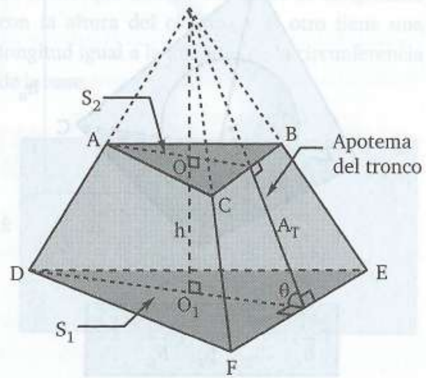
Si en una pirámide se traza un plano paralelo a su base y secante a la superficie lateral, entonces el sólido comprendido entre la base y el plano paralelo trazado se denomina tronco de pirámide.



$$V_{TRONCO} = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1\ .\ S_2}\right)$$

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es el tronco de pirámide cuyas bases son regiones poligonales regulares semejantes y sus caras laterales son regiones trapeciales isósceles. Las alturas de estos trapecios se llaman apotemas del tronco.



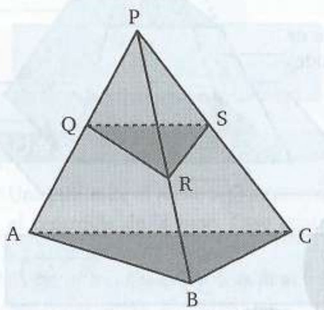
Si los semiperímetros de las bases son P_1 y P_2:

$$\boxed{S_L = (P_1 + P_2)\cdot A_T}$$

$$\boxed{S_1 - S_2 = S_L \times \cos\theta}$$

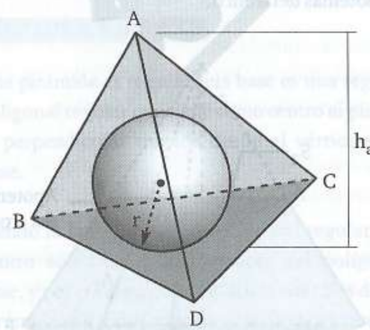
TEOREMAS

1. Para toda pirámide triangular al trazar un plano secante se cumple:



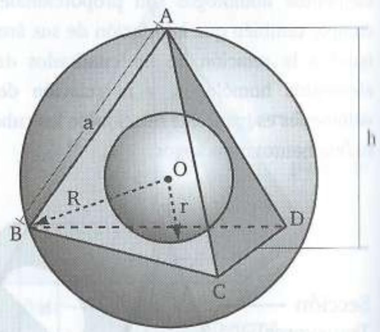
$$\boxed{\frac{V_{(P-ABC)}}{V_{(P-QRS)}} = \frac{(PA)(PB)(PC)}{(PQ)(PR)(PS)}}$$

2. En el tetraedro ABCD si h_a, h_b, h_c y h_d son alturas y r: radio de la esfera inscrita:



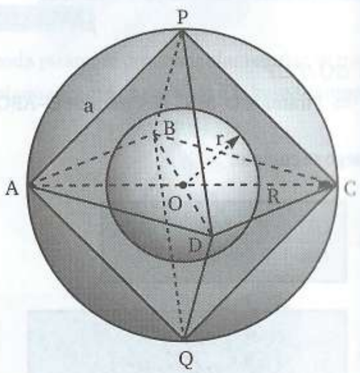
$$\boxed{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{1}{r}}$$

3. En un tetraedro regular de arista a:
   r : radio de la esfera inscrita
   R : radio de la esfera circunscrita
   R_a : radio de la esfera exinscrita
   h : altura



$$\boxed{\frac{r}{1} = \frac{R_a}{2} = \frac{R}{3} = \frac{h}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}}$$

4. En un octaedro regular de arista "a"
   r : radio de la esfera inscrita
   R : radio de la esfera circunscrita



$$\boxed{\frac{r}{1} = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

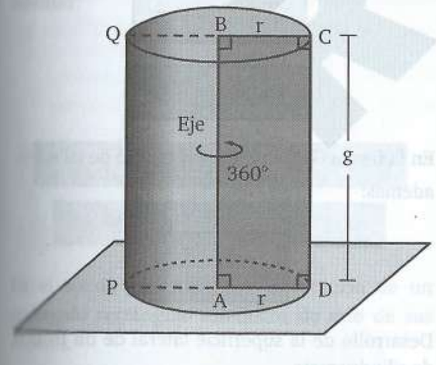
CILINDRO CIRCULAR RECTO O CILINDRO DE REVOLUCIÓN

Es el sólido generado por la rotación de una región rectangular alrededor de uno de sus lados.

Si la región rectangular ABCD rota alrededor de su lado AB, entonces genera el cilindro representado en la figura.

El lado AB del rectángulo generador es el eje del cilindro, el lado opuesto CD es la generatriz (al girar determina la superficie lateral del cilindro) y los lados BC y AD, que generan en su movimiento las bases del cilindro (círculos congruentes), son los radios de las bases del cilindro.

Se llama altura de un cilindro a la distancia entre las bases. En el cilindro de revolución la altura es congruente con la generatriz.



$$\boxed{S_{LATERAL} = 2\pi rg}$$

$$\boxed{S_{TOTAL} = 2\pi r(g + r)}$$

$$\boxed{V_{CILINDRO} = \pi r^2 g}$$

OBSERVACIÓN

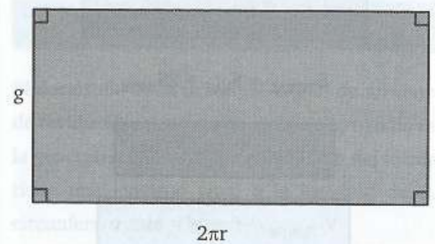
La sección axial de un cilindro de revolución, es una sección que se obtiene en el cilindro por un plano que contiene al eje, en la figura es la región rectangular PQCD.

Un cilindro es equilátero si su sección axial esta limitado por un cuadrado, o sea $g = 2r$

Se considera que el cilindro circular recto es el límite al cual tienden los prismas regulares cuando el número de lados de la base aumenta indefinidamente. Es por esta razón que las fórmulas utilizadas para calcular áreas y volumen en el cilindro tienen similitud con las fórmulas utilizadas en el prisma.

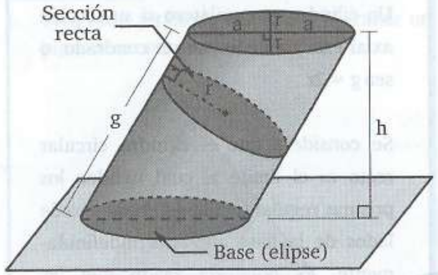
DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CILINDRO DE REVOLUCIÓN

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es una región rectangular de modo que uno de sus lados es congruente con la altura del cilindro y el otro tiene una longitud igual a la longitud de la circunferencia de la base.



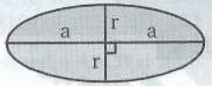
CILINDRO OBLICUO

Es el sólido determinado al intersecar a un cilindro circular recto mediante dos planos paralelos (no paralelos a las bases) y secante a todas las generatrices. En un cilindro oblicuo las bases son regiones elípticas, las generatrices no son perpendiculares a las bases.



$$S_{LATERAL} = 2\pi rg$$

En la base el semieje menor (r) es igual al radio de la sección recta.



$$S_{ELIPSE} = \pi ar$$

Fórmula aproximada para calcular la longitud de la elipse "Le"

$$L_e \approx \pi(a+b) \approx \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

$$S_{TOTAL} = S_{LAT} + 2S_{BASE}$$

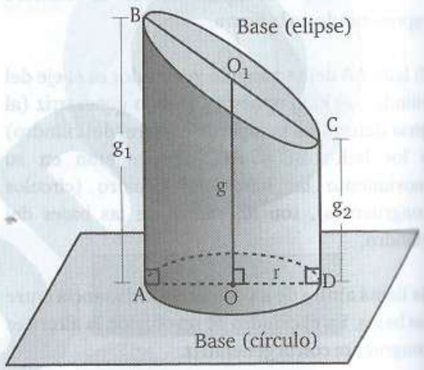
$$S_{TOTAL} = 2\pi rg + 2\pi ar$$

$$V_{CILINDRO} = \pi r^2 g = \pi ar \,.\, h$$

TRONCO DE CILINDRO

Se llama tronco de cilindro recto u oblicuo a cada una de las partes en que queda dividido un cilindro cualquiera cuando se traza un plano secante a todas las generatrices del cilindro y no paralelo a las bases.

TRONCO DE CILINDRO RECTO



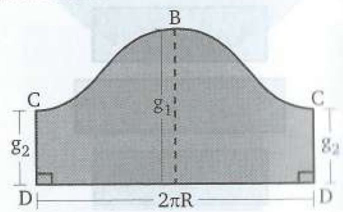
$$S_{LATERAL} = 2\pi rg$$

$$V_{TRONCO} = \pi r^2 g$$

En la figura $\overline{OO_1}$ es el eje del tronco de cilindro, además:

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

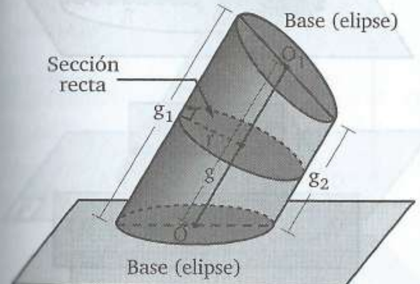
Desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cilindro recto.



OBSERVACIÓN

Se llama "cuña cilíndrica recta" si $g_2 = 0$

TRONCO DE CILINDRO OBLICUO



$$S_{LATERAL} = 2\pi rg$$

$$V_{TRONCO} = \pi r^2 g$$

En la figura $\overline{OO_1}$ es el eje del tronco de cilindro, además:

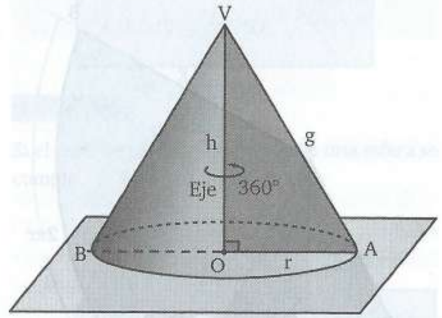
$$g = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

CONO CIRCULAR RECTO O CONO DE REVOLUCIÓN

Es el sólido generado por la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Si el triángulo rectángulo VOA rota alrededor del cateto $\overline{VO}$, entonces genera el cono representado en la figura.

El cateto $\overline{VO}$ del triángulo generador es el eje (altura); el otro cateto $\overline{OA}$, es el radio de la base y la hipotenusa $\overline{AV}$ es la generatriz del cono.



$$S_{LATERAL} = \pi rg$$

$$S_{TOTAL} = \pi r(g+r)$$

$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

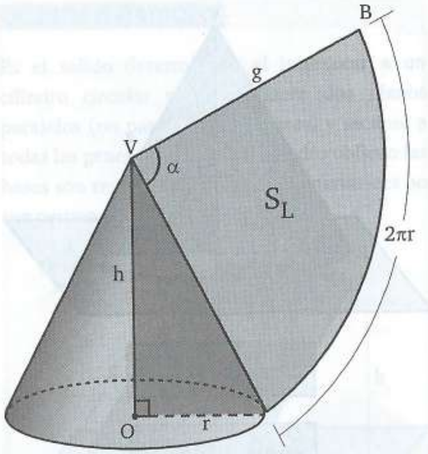
OBSERVACIÓN

La sección axial de un cono de revolución, es una sección que se obtiene en el cono por un plano que contiene al eje, en la figura es la región triangular BVA.

Un cono es equilátero si su sección axial esta limitado por un triángulo equilátero, o sea: g = 2r.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CONO DE REVOLUCIÓN

El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución, es un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono, además el arco del sector tiene una longitud igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono.



Se puede observar que la superficie lateral del cono y el sector circular tiene igual área, luego:

$$S_{L\,(CONO)} = S_{SECTOR\,(BVA)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi r g = \pi g^2 \frac{\alpha}{360}$$

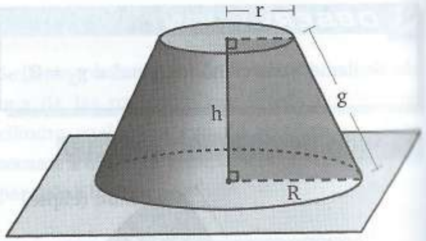
$$\boxed{\frac{r}{g} = \frac{\alpha}{360}}$$

OBSERVACIÓN

Si el desarrollo de la superficie lateral de un cono circular recto es un semicírculo, entonces el diámetro de la base del cono es congruente con la generatriz. En este caso se dice que el cono es equilátero.

TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

Se llama tronco de cono a la parte del cono comprendido entre la base y una sección paralela a la base.

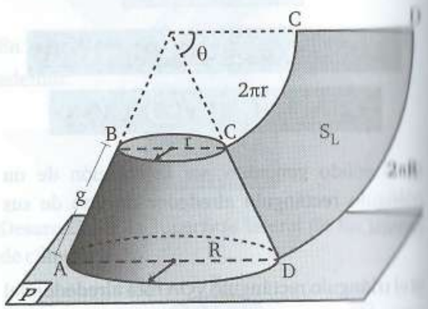


$$\boxed{S_L = \pi g(r + R)}$$

$$\boxed{V_{TRONCO} = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + R^2 + r\,.\,R\right)}$$

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

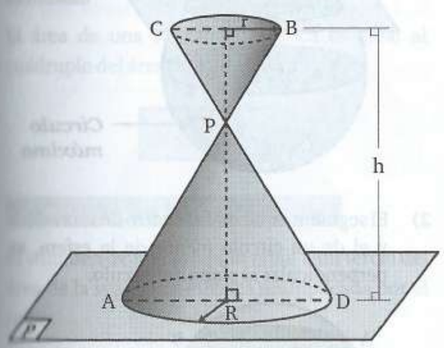
Es un trapecio circular, cuyos arcos correspondientes tienen longitudes iguales a las circunferencias que limitan sus bases del tronco y cuyos lados laterales miden igual las generatrices del tronco.



θ : medida del ángulo de desarrollo

$$\boxed{\theta = \left(\frac{R - r}{g}\right)360}$$

TRONCO DE CONO DE SEGUNDA ESPECIE



$$\boxed{V_{TRONCO} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 - Rr\right)}$$

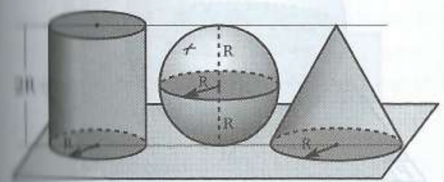
TEOREMAS

En todo cono al trazar una sección transversal (plano paralelo a la base); determina un cono parcial que es semejante al total; en el cual se cumple:

a) Las longitudes de todas sus líneas homólogos son proporcionales.
b) Las áreas de sus bases; de sus superficies laterales y de sus áreas totales son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de sus líneas homólogas.
c) Los volúmenes son proporcionales a los cubos de las longitudes de sus líneas homólogas.

TEOREMA

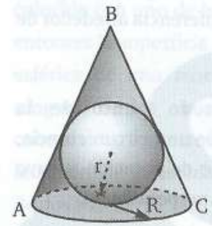
Si los sólidos de revolución (cilindro, esfera y cono) que tienen el mismo radio (R) y la misma altura (2R), sus volúmenes son proporcionales a 3; 2 y 1 respectivamente.



$$\boxed{\frac{V_{CILINDRO}}{3} = \frac{V_{ESFERA}}{2} = \frac{V_{CONO}}{1}}$$

TEOREMA

Si el cono de revolución se inscribe una esfera se cumple:



$$\boxed{\frac{V_{CONO}}{V_{ESFERA}} = \frac{S_{CONO}}{S_{ESFERA}}}$$

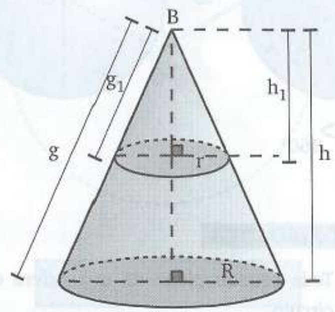
TEOREMA: SEMEJANZA DE CONOS

Si dos conos son generados por triángulos semejantes que giran alrededor de dos lados homólogos, dichos conos son semejantes.

También si se interseca a un cono por un plano paralelo a la base se obtiene un cono pequeño semejante al total, debiéndose cumplir.

A) Las áreas de sus bases son entre sí como el cuadrado de las longitudes de sus elementos homólogos.

B) Los volúmenes son entre sí como el cubo de sus elementos homólogos.



$$\boxed{\frac{S_1}{S} = \frac{h_1^2}{h^2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{g_1^2}{g^2}} \qquad \boxed{\frac{V_1}{V} = \frac{h_1^3}{h^3} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{g_1^3}{g^3}}$$

ESFERA, SUPERFICIE ESFÉRICA Y SUS PARTES

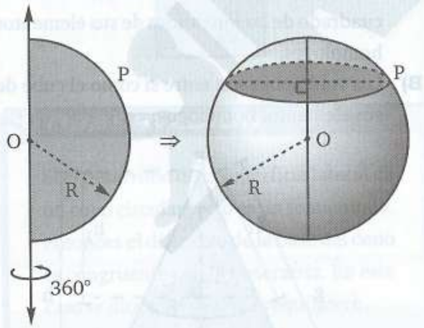
SUPERFICIE ESFÉRICA Y ESFERA

Se llama superficie esférica la engendrada por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

En este movimiento todo punto de la semicircunferencia describe una circunferencia, cuyo centro está en el eje de rotación y cuyo plano que la contiene, le es perpendicular.

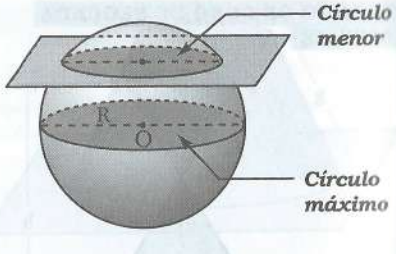
Como cualquier punto P, de la superficie esférica pertenece a la semicircunferencia que la engendra, y el centro de ésta no se mueve en el giro, concluimos que: todos los puntos de la superficie equidistan de un punto fijo, llamado centro.

A la distancia fija entre cualquier punto de la superficie esférica y su centro se le llama radio.

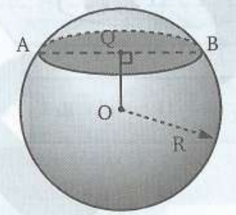


PROPIEDADES

1) Toda sección plana de una esfera es un círculo.
Si el plano secante no pasa por el centro se obtendrá un círculo menor y si pasa por el centro un círculo máximo.

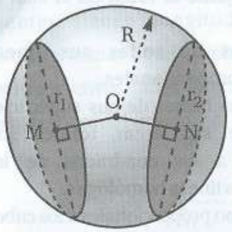


2) El segmento que une el centro de una esfera y el de un círculo menor de la esfera, es perpendicular al plano del círculo.



$\overline{OQ} \perp \overline{AB}$

3) Planos equidistantes del centro de una esfera la cortan en círculos congruentes.

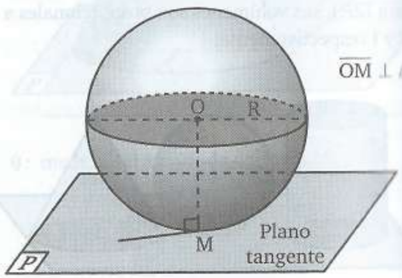


Si $OM = ON$

$\Rightarrow r_1 = r_2$

4) Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

$\overline{OM} \perp \mathcal{P}$



ÁREA DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA ($S_{(S.E.)}$)

El área de una superficie esférica es igual al cuádruplo del área de un círculo máximo.

$$\boxed{S_{(S.E.)} = 4\pi R^2}$$

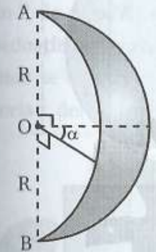
VOLUMEN DE LA ESFERA (V_E)

El volumen de una esfera es igual a un tercio del área de la superficie esférica multiplicada por el radio.

$$\boxed{V_E = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

HUSO ESFÉRICO

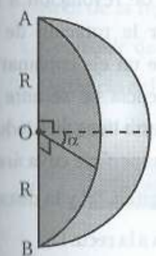
Se llama huso esférico a la superficie generada por una semicircunferencia al girar un cierto ángulo (menor que 360) alrededor de su diámetro.



$$\boxed{S_{HUSO} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}}$$

CUÑA ESFÉRICA

Es el sólido engendrado por un semicírculo que gira un cierto ángulo (menor que 360) alrededor de su diámetro.



$$\boxed{V_{CUÑA} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}}$$

ZONA ESFÉRICA

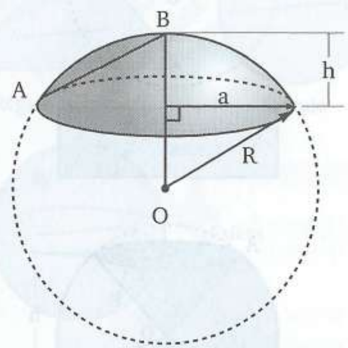
Es la superficie generada por un arco de circunferencia que gira alrededor de un diámetro exterior.

Si uno de los extremos del arco generador coincide con uno de los extremos del diámetro, entonces la superficie generada se llamará zona esférica de una base o casquete esférico. Si ninguno de los extremos del arco generador coincide con los extremos del diámetro entonces la superficie generada se llamará zona esférica de dos bases.

SEGMENTO ESFÉRICO

Es la porción de esfera comprendida entre una zona esférica y sus base. La distancia entre las bases se llama altura del segmento esférico.

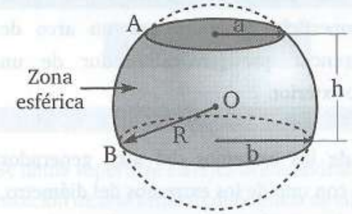
ZONA ESFÉRICA DE UNA BASE O CASQUETE ESFÉRICO



$$\boxed{S_{CASQUETE} = 2\pi Rh = \pi AB^2}$$

$$\boxed{V_{SEG.ESF} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h a^2}$$

ZONA ESFÉRICA DE DOS BASES

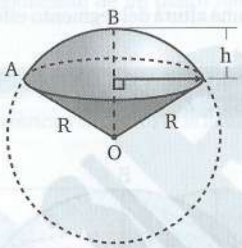


$$S_{ZONA} = 2\pi Rh$$

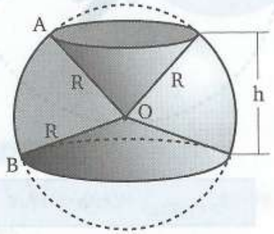
$$V_{SEG.ESF} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2)$$

SECTOR ESFÉRICO

Se llama sector esférico al sólido engendrado por la revolución de un sector circular alrededor de un diámetro exterior.



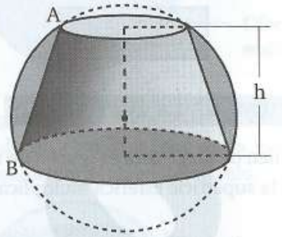
$$V_{SECTOR.ESF} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$



$$V_{SECTOR.ESF} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

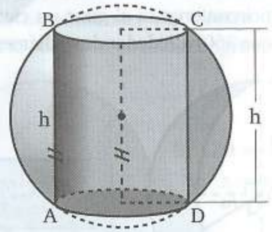
ANILLO ESFÉRICO

Se llama anillo esférico al sólido engendrado por un segmento circular al girar alrededor de un diámetro exterior.



$$V_{ANILLO.ESF} = \frac{1}{6}\pi AB^2 h$$

CASO PARTICULAR

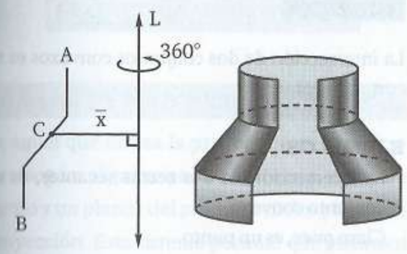


$$V_{ANILLO.ESF} = \frac{1}{6}\pi h^3$$

TEOREMA DE PAPPUS

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Se denomina sólido de revolución a todo aquel que se genera por la rotación de una región plana alrededor de un eje coplanar con dicha región y de preferencia no secante a la misma. L al hacer girar a esta línea alrededor de la recta L se obtiene una superficie cuya área se calcula conociendo la longitud "ℓ" y la distancia $\bar{x}$; del centroide de la línea a la recta L.



ℓ : Longitud de la línea que gira

C : Centroide de la línea que gira

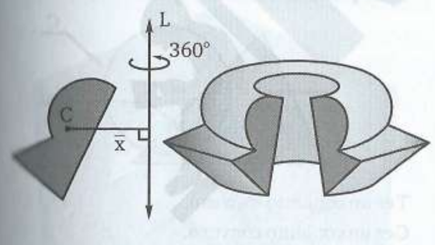
$\bar{x}$: Distancia del centroide C hacia $\overline{L}$

A_{SG} : Área de la superficie generada

$$A_{SG} = 2\pi\bar{x} \cdot \ell$$

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si en un plano se tiene una recta L y en uno de los semiplanos que determina se tiene, la región R de área "A", al hacer girar esta región alrededor de la recta L se obtiene un sólido cuyo volumen se calcula conociendo el área A y la distancia $\bar{x}$, del centroide de la región a la recta L.



A : Área de la región que gira

C : Centroide de la región que gira

$\bar{x}$: Distancia del centroide C hacia $\overline{L}$

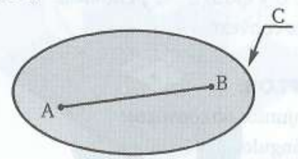
V_{SG} : Volumen del sólido generado

$$V_{SG} = 2\pi\bar{x}A$$

CONJUNTO CONVEXO

DEFINICIÓN

Un conjunto "C" es convexo, si para todo par de puntos A y B del conjunto "C", el segmento de extremos A y B ($\overline{AB}$) está contenido en el conjunto C.



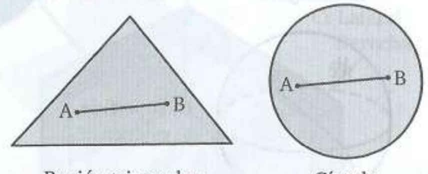
Sea el conjunto "C", tales que:

$\forall$A; B que $\in$ C, el $\overline{AB}$ está incluido en "C", entonces: "C" es un conjunto convexo.

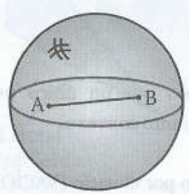
EJEMPLOS:

Son conjuntos convexos:

* La región triangular.
* El círculo.
* Una esfera, etc.



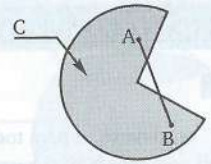
Región triangular — Círculo



Esfera

CONJUNTO NO CONVEXO

Un conjunto de puntos "C", es un conjunto no convexo, cuando existen dos puntos A y B del conjunto C, tal que el segmento de extremos A y B ($\overline{AB}$), no todos sus puntos pertenecen al conjunto "C".

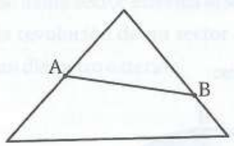


Dado el conjunto "C", tales que:
A y B ∈ C y el $\overline{AB} \not\subset$ "C", entonces "C" no es un conjunto convexo.

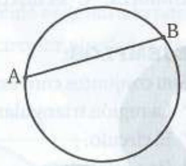
EJEMPLOS:

Son conjuntos no convexos:

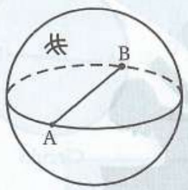
* El triángulo.
* La circunferencia.
* La superficie esférica, etc.



El triángulo



La circunferencia



La superficie esférica

DEFINICIONES

* El conjunto formado por un único punto (PUNTO), es un conjunto convexo.

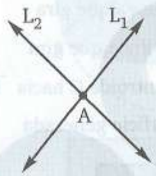
* El conjunto formado por el vacío (VACÍO), es un conjunto convexo.

TEOREMA

La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

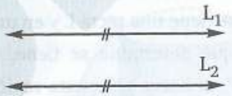
EJEMPLOS:

* La intersección de dos rectas secantes, es un conjunto convexo.
  Claro pues, es un punto.



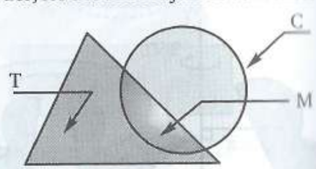
$\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{A\}$
Entonces el punto "A" es un conjunto convexo.

* La intersección de dos rectas paralelas, es un conjunto convexo.
  Claro pues, es el vacío.



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$
$\rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \emptyset$

* La intersección de una región triangular y un círculo, es un conjunto convexo,
  Claro pues, los dos son conjuntos convexos.



T es un conjunto convexo.
C es un conjunto convexo.
Además: $T \cap C = \{M\}$.
Entonces M es un conjunto convexo.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

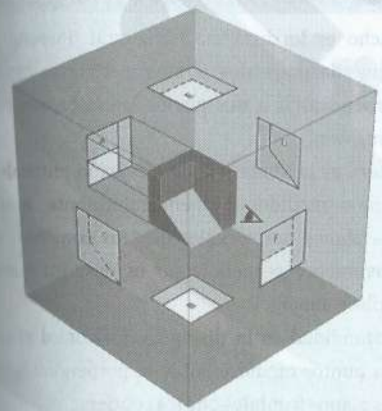
SISTEMA DE PROYECCIÓN ORTOGONAL

Es aquel que utiliza la proyección perpendicular (según el principio de distancia entre un punto y un plano) del punto hacia los planos de proyección. Este sistema permite que podamos utilizar las tres coordenadas x, y, z.

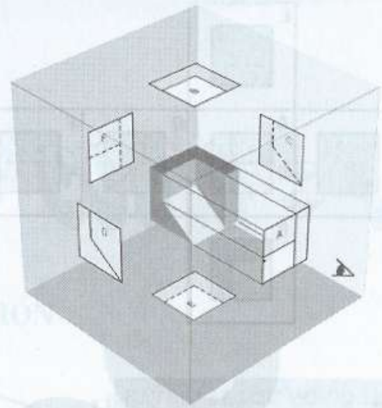
Los planos de proyección son ortogonales, perpendiculares entre sí, y se unen los verticales con el horizontal mediante una línea en común denominada Línea de Tierra (LT).

En el campo del dibujo técnico existen dos sistemas que normalizan las disposiciones de las vistas ortogonales: el Europeo (ISO) y el Americano (ASA).

En el Sistema Europeo (ISO); el objeto se encuentra entre el observador y el plano de observación.

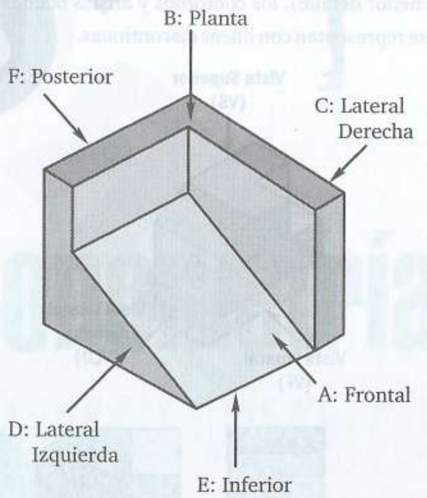


En el Sistema Americano (ASA); el plano de proyección se encuentra entre el observador y el objeto.

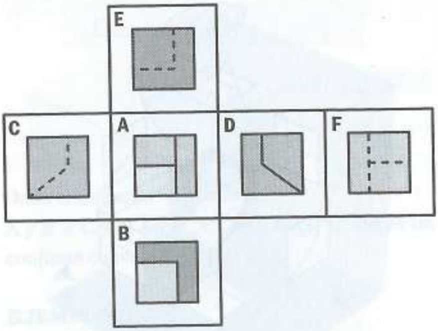


UBICACIÓN DE LAS VISTAS ORTOGONALES

En el Perú se representa en el sistema ISO. Las vistas se representan en un ángulo de 90°.

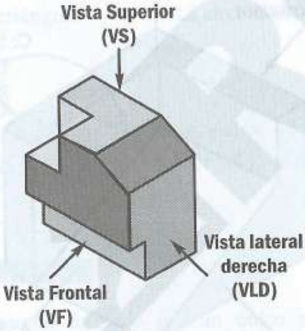


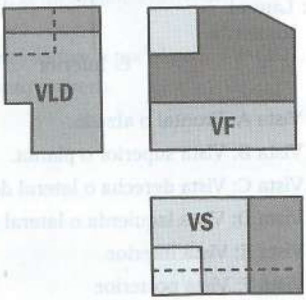
* Vista A: Frontal o alzado.
* Vista B: Vista superior o planta.
* Vista C: Vista derecha o lateral derecha.
* Vista D: Vista izquierda o lateral izquierda.
* Vista E: Vista inferior.
* Vista F: Vista posterior.



ELECCIÓN DE LAS VISTAS

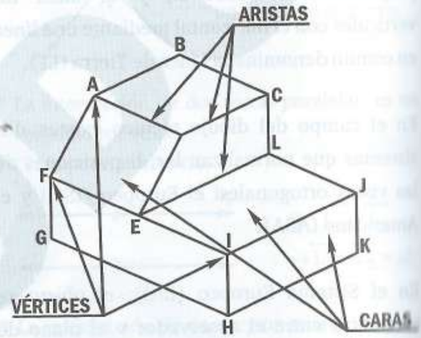
Generalmente son las tres vistas principales en el sistema de proyección ortogonal: Frontal; la que tenga el mayor número de detalles, la vista Superior y las vistas Laterales (que son las de menor detalle), los contornos y aristas ocultas se representan con líneas discontinuas.





ELEMENTOS DE UN VOLUMEN

Cualquier volumen está formado por varias superficies llamadas CARAS que se intersecan entre sí; estas intersecciones entre las caras serán líneas rectas o líneas curvas, de acuerdo al tipo de superficies que se intersequen. Estas intersecciones las llamaremos ARISTAS. Al punto donde concurren tres o más aristas lo llamaremos VÉRTICE, originado también por la intersección de tres o más caras.



DIMENSIONES PRINCIPALES DE UN VOLUMEN

Ancho es la distancia horizontal derecha o izquierda entre dos puntos medida sobre la perpendicular a dos planos laterales que los contienen.

Altura es la diferencia de elevación entre dos puntos medidos perpendicularmente entre dos planos horizontales que los contiene, el movimiento perpendicular es descrito como arriba o abajo.

Profundidad es la distancia horizontal entre dos puntos medidos sobre la perpendicular a dos planos frontales que los contiene.