Todos los Temas - Edición 2016

RESUMEN TEÓRICO
MATEMÁTICAS Y CIENCIAS

Aritmética
Álgebra
Geometría Plana
Geometría del Espacio
Trigonometría
Razonamiento Matemático
Física
Química
Biología y Anatomía

La Biblia

FONDO EDITORIAL
RODO
Siempre Competitivo

CIENCIAS, 6ta Edición

de Walter Z. Benitez Nuñez
Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña
LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 992 - 796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N°: 2015 - 16414

EQUIPO PEDAGÓGICO

Aritmética	Jimmy García	Eddy Huamaní	
Álgebra	Juan C. Ramos Leyva		
Geometría Plana	César Trucios	Manuel Trujillo	
Geometría del Espacio	César Trucios	Manuel Trujillo	
Trigonometría	Walter Mori Valverde		
Razonamiento Matemático	Américo Portilla Gaspar		
Física	Abraham Visalaya	Carlos Jiménez	
Química	César Urquizo	Javier Abad	Joel Rojas
Biología y Anatomía	Juan Soto Chávez		

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS
José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ
Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**
Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

PRESENTACIÓN

Creemos que la educación atraviesa por múltiples dificultades, vemos como en el transcurrir de los procesos de Admisión, grupos de especialistas discuten y dictaminan cambios en los modelos de prueba que son tomados en los llamados Concursos de Admisión. Es por ello que tenemos que ser consecuentes del rol protagónico que tenemos todos aquellos quienes nos encontramos inmersos en la labor educativa.

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo conformado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y resolución de Exámenes de Admisión tomados en las diferentes universidades de nuestro país, tales como la UNI, UNMSM, UNAC, UNA y UNFV.

Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo en manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral, dándole prioridad a los cursos de matemática y ciencias.

Continuando con la elaboración de nuestra colección, en esta oportunidad presentamos el texto teórico denominado **RESUMEN TEÓRICO DE CIENCIAS**, concentrando todo el esfuerzo y la experiencia del grupo humano que la conforman. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas solicitados por el prospecto de Admisión.

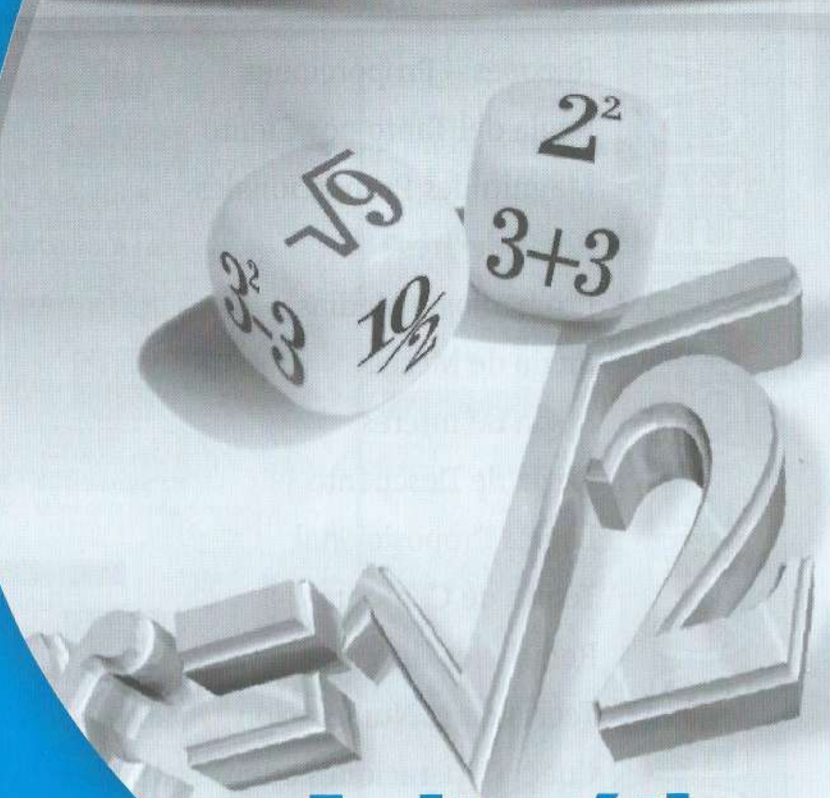
Esta obra forma parte de la serie de publicaciones que permitirán al estudiante acceder a un material novedoso el cual sabemos generará diversos comentarios y sugerencias, los cuales sabremos aceptar.

Fondo Editorial RODO
De: Walter Z. Benitez Nuñez

ÍNDICE

CIENCIAS

Resumen Teórico



Aritmética

FONDO EDITORIAL RODO

ÍNDICE

RESUMEN TEÓRICO DE ARITMÉTICA

RAZONES

RAZÓN ARITMÉTICA

$$\boxed{A - B = R}$$

Donde: A : Antecedente
B : Consecuente
R : Valor de la razón aritmética

RAZÓN GEOMÉTRICA

$$\boxed{\frac{A}{B} = k}$$

Donde: A : Antecedente
B : Consecuente
k : Valor de la razón geométrica

RAZÓN ARMÓNICA

$$\boxed{\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = r}$$

Donde: A : Antecedente
B : Consecuente
r : Valor de la razón armónica

PROPORCIONES

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

$$\overbrace{\underset{\text{1er}}{A} - \underset{\text{2do}}{B} = \underset{\text{3er}}{C} - \underset{\text{4to}}{D}}^{\text{TÉRMINOS}}$$

TÉRMINOS MEDIOS: B y C

TÉRMINOS EXTREMOS: A y D

Consecuencia:

$$\underbrace{A + D}_{\text{SUMA DE EXTREMOS}} = \underbrace{B + C}_{\text{SUMA DE MEDIOS}}$$

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

$$\text{TÉRMINOS}\left\{\begin{matrix}\text{1er} \to \\ \text{2do} \to\end{matrix}\right. \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \left.\begin{matrix}\leftarrow \text{3er} \\ \leftarrow \text{4to}\end{matrix}\right\}\text{TÉRMINOS}$$

A y D : TÉRMINOS EXTREMOS
B y C : TÉRMINOS MEDIOS

Consecuencia:

$$\underbrace{A \cdot D}_{\text{PRODUCTO EXTREMOS}} = \underbrace{B \cdot C}_{\text{PRODUCTO MEDIOS}}$$

PROPORCIÓN ARMÓNICA

$$\underset{\text{1er}}{\frac{1}{A}} - \underset{\text{2do}}{\frac{1}{B}} = \underset{\text{3ero}}{\frac{1}{C}} - \underset{\text{4to}}{\frac{1}{D}} \Rightarrow \text{Términos}$$

A y D : TÉRMINOS EXTREMOS
B y C : TÉRMINOS MEDIOS

Consecuencia:

$$\underbrace{\frac{1}{A} + \frac{1}{D}}_{\text{Suma de las Inversas de los extremos}} = \underbrace{\frac{1}{B} + \frac{1}{C}}_{\text{Suma de las Inversas de los medios}}$$

DISCRETA

- **ARITMÉTICA:**

$$a - b = c - d \leftarrow \text{Cuarta diferencial de a; b y c}$$

- **GEOMÉTRICA:**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftarrow \text{Cuarta proporcional de a; b y c}$$

- **ARMÓNICA:**

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \longleftarrow \text{Cuarta armónica de a; b y c}$$

CONTINUA

- **ARITMÉTICA:**

$$a-\boxed{b}=\boxed{b}-c \leftarrow \text{Tercera diferencial de a y b}$$

Media diferencial de a y c

- **GEOMÉTRICA:**

$$\frac{a}{\boxed{b}}=\frac{\boxed{b}}{c} \leftarrow \text{Tercera proporcional de a y b}$$

Media proporcional de a y c

- **ARMÓNICA:**

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{\boxed{b}}=\frac{1}{\boxed{b}}-\frac{1}{c} \leftarrow \text{Tercera armónica de a y b}$$

Media armónica de a y c

PROPIEDADES DE LA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Sea la proporción: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Algunas propiedades son:

- $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$
- $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n};\ n\in\mathbb{Q}$
- $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$
- $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
- $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

Para "n" razones:

$$\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\frac{a_3}{c_3}=\ldots=\frac{a_n}{c_n}=k$$

Donde:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$: Antecedentes

$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$: Consecuentes

k : Constante de proporcionalidad de la serie (valor de la razón)

PROPIEDADES

1. $$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n}=k$$

Textualmente:

$$\frac{\text{(Suma de Antecedentes)}}{\text{(Suma de Consecuentes)}}=\text{(RAZÓN)}$$

2. $$\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}{c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot\ldots\cdot c_n}=k^n$$

Textualmente:

$$\frac{\text{(Producto de Antecedentes)}}{\text{(Producto de Consecuentes)}}=\text{(RAZÓN)}^n$$

n: Número de razones que se multiplican

OBSERVACIÓN

Serie de razones geométricas continuas equivalentes

$$\frac{a}{c_1}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{c_2}{c_3}=\ldots=\frac{c_{n-1}}{c_n}=k$$

Sea: $c_n=m$

$$\frac{mk^n}{mk^{n-1}}=\frac{mk^{n-1}}{mk^{n-2}}=\ldots=\frac{mk^2}{mk^1}=\frac{mk^1}{m}=k$$

REGLA DEL TANTO POR CIENTO

100 partes iguales

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	......	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

1 por ciento $<>\frac{1}{100}<>$ 1%

$$N=100\%N$$

OBSERVACIÓN

El m por n de A $<>\frac{m}{n}(A)$

EQUIVALENCIAS

- $5\% <> \frac{1}{20}$ * $12,5\% <> \frac{1}{8}$
- $10\% <> \frac{1}{10}$ * $37,5\% <> \frac{3}{8}$
- $20\% <> \frac{1}{5}$ * $33,\overline{3}\% <> \frac{1}{3}$
- $50\% <> \frac{1}{2}$ * $66,\overline{6}\% <> \frac{2}{3}$
- $75\% <> \frac{3}{4}$ * $200\% <> 2$

OPERACIONES CON EL TANTO POR CIENTO

ADICIÓN

$a\%N+b\%N=(a+b)\%N$

SUSTRACCIÓN

$a\%N-b\%N=(a-b)\%N$

MULTIPLICACIÓN

El a% del b% del c% de N es: $a\%\times b\%\times c\%\times N$

DESCUENTOS SUCESIVOS

Sea la cantidad inicial: N

Ejemplo:

Una tienda ofrece dos descuentos sucesivos del 20% y 10%. ¿Cuál es el descuento único?

Forma práctica:

$((N)\ 80\%)\ 90\%=72\%N$

Descuento 20%

Descuento 10%

Descuento único: $N-72\%N=28\%N$

$\therefore$ El descuento único es 28%

AUMENTOS SUCESIVOS

Sea la cantidad inicial: M

Ejemplo:

El sueldo de un empleado se ve afectado por dos aumentos sucesivos del 10% y 20%. ¿Cuál es el aumento único?

Forma práctica:

$((M)\ 110\%)\ 120\%=132\%N$

Aumentó 10%

Aumentó 20%

Aumento único: $132\%M-M=32\%M$

$\therefore$ El aumento único es 32%

APLICACIONES COMERCIALES

Elementos:

- Precio de costo (Pc)
- Ganancia ó ganancia bruta (G)
- Pérdida (P)
- Precio de venta (Pv)
- Rebaja o descuento (D)
- Precio fijado o de lista (PF)

Se cumple:

- Si hay ganancia:

$$\boxed{P_V=P_C+G}$$

Por lo general es un % del Pc

- Si hay pérdida:

$$\boxed{P_V=P_C-P}$$

Por lo general es un % del Pc

- Si hay descuento:

$$\boxed{P_V=P_F-D}$$

Por lo general es un % del PF

- Si hay gastos:

$$\boxed{G=G_N+(\text{gastos})}$$

- Si no hay ganancia ni pérdida:

$$\boxed{P_V=P_C}$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Ejemplos:

MAGNITUD	CANTIDAD
TEMPERATURA	10° C
VOLUMEN	245,5 ℓ
NÚMERO DE DÍAS	37 días

RELACIÓN ENTRE 2 MAGNITUDES

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES (D.P.)

Ejemplo:

$\times 6 \quad \times\frac{1}{2} \quad \times 3$

Distancia (km)	80	480	240	720
Tiempo (h)	1	6	3	9

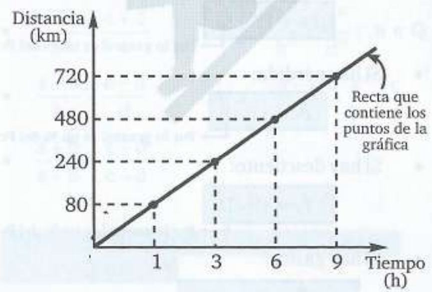
$\times 6 \quad \times\frac{1}{2} \quad \times 3$

∴ (DISTANCIA) D.P. (TIEMPO)

Luego:

$$\frac{\text{(valor de la distancia)}}{\text{(valor del tiempo)}} = \frac{80}{1} = \frac{480}{6} = \frac{240}{3} = \frac{720}{9} = \text{cte}$$

Gráficamente:



En general

Si las magnitudes A y B son directamente proporcionales; además se muestran sus valores correspondientes:

A	a_1	a_2	a_3	...	a_n
B	b_1	b_2	b_3	...	b_n

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Lo que denotaremos:

$\boxed{\frac{a_i}{b_i} = k}$ donde "k" es una constante $1 \le i \le n$; $i \in \mathbb{Z}^+$

- **Función de proporcionalidad directa**

$$\boxed{\frac{F(x)}{x} = k}$$

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (I.P.)

Ejemplo:

$\times 2 \quad \times 3 \quad \times\frac{1}{2}$

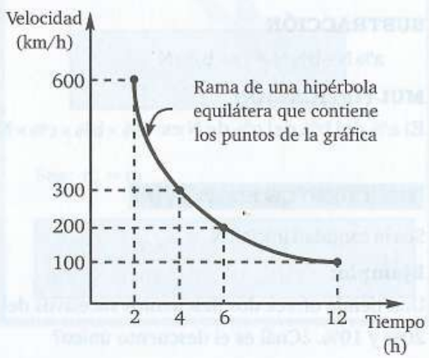
Velocidad (km/h)	100	200	600	300
Tiempo (h)	12	6	2	4

$\times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times 2$

∴ (VELOCIDAD) I.P. (TIEMPO)

(valor de la velocidad)(valor del tiempo) =
= 100×12 = 200×6 = 600×2 = 300×4 = cte.

Gráficamente:



En general,

Si las magnitudes A y B son inversamente proporcionales; además se muestran sus valores correspondientes:

A	a_1	a_2	a_3	...	a_n
B	b_1	b_2	b_3	...	b_n

$$\Rightarrow a_1 \times b_1 = a_2 \times b_2 = a_3 \times b_3 = \ldots = a_n \times b_n = k$$

Lo que denotaremos:

$\boxed{a_i \times b_i = k}$ donde "k" es una constante $1 \le i \le n$; $i \in \mathbb{Z}^+$

- **Función de proporcionalidad inversa**

$$\boxed{F(x) \cdot x = k}$$

PROPIEDADES

Sean las magnitudes A y B:

1)
- A D.P. B ↔ B D.P. A
- A I.P. B ↔ B I.P. A

2) A I.P. B ↔ A D.P. $\frac{1}{B}$

A D.P. B ↔ A I.P. $\frac{1}{B}$

3) Si $n \in \mathbb{Q}$:
- A D.P. B ↔ A^n D.P. B^n
- A I.P. B ↔ A^n I.P. B^n

4) Sean las magnitudes A; B y C donde:
- A D.P. B; (C es constante)
- A D.P. C; (B es constante)

→ A D.P. (B × C)

5) Sean las magnitudes: A, B, C, D y E, donde:
- A D.P. B ; (C; D; E: constantes)
- A I.P. C ; (B; D; E: constantes)
- A D.P. D ; (B; C; E: constantes)
- A I.P. E ; (B; C; D: constantes)

Luego:

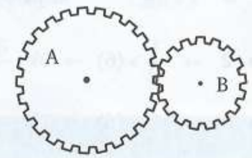
$$\boxed{\frac{\text{(Valor de A)(Valor de C)(Valor de E)}}{\text{(Valor de B)(Valor de D)}} = \text{cte.}}$$

NOTA

Sea: V_A : # de vueltas de la rueda "A"
d_A : # de dientes de la rueda "A"

Tener presente:

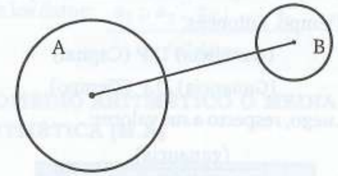
a) Ruedas engranadas o Concatenadas



Observación: (#vueltas) I.P. (#dientes)

$$\boxed{V_A \times d_A = V_B \times d_B}$$

b) Ruedas unidas por el mismo eje



Observación: Como están unidas por un eje común:

$$\boxed{V_A = V_B}$$

APLICACIONES DE LAS MAGNITUDES PROPORCIONALES

REPARTO PROPORCIONAL

Ejemplos:

i) Repartir 180 D.P. a 3; 4 y 5:

$$180\begin{cases} \overset{DP}{3} \rightarrow \overset{REPARTO}{3k} \rightarrow 45 \\ 4 \rightarrow 4k \rightarrow 60 \\ 5 \rightarrow 5k \rightarrow 75 \end{cases}$$

$$12k = 180$$

$$k = 15$$

ii) Repartir 180 I.P. a 2; 3 y 6:

$$180\begin{cases} \overset{IP}{2} \rightarrow \overset{DP}{\frac{1}{2}\times(6)} \rightarrow \overset{REPARTO}{3k} \rightarrow 90 \\ 3 \rightarrow \frac{1}{3}\times(6) \rightarrow 2k \rightarrow 60 \\ 6 \rightarrow \frac{1}{6}\times(6) \rightarrow 1k \rightarrow 30 \end{cases}$$

$$6k = 180$$

$$k = 30$$

NOTA

Sean las magnitudes: Ganancia, Capital y Tiempo. Entonces:

(Ganancia) D.P (Capital)

(Ganancia) D.P (Tiempo)

Luego, respecto a sus valores:

$$\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})(\text{tiempo})} = \text{cte}$$

Cuando hay pérdida:

$$\frac{(\text{pérdida})}{(\text{capital})(\text{tiempo})} = \text{cte}$$

REGLA DE TRES

Es una aplicación de las magnitudes proporcionales que consiste en calcular un valor desconocido de una magnitud, comparando dos o más magnitudes proporcionales.

REGLA DE TRES SIMPLE

Una regla de tres es simple cuando intervienen solamente dos magnitudes. Puede ser:

DIRECTA

La regla de tres simple es directa cuando las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales.

Sean A y B dos magnitudes directamente proporcionales, con sus respectivos valores correspondientes.

$$\overset{\text{D.P.}}{A \quad B}$$

$$a_1 \longrightarrow b_1$$

$$a_2 \longrightarrow x$$

Como A D. P. B, se cumple:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x}}$$

INVERSA

La regla de tres simple es inversa cuando las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales.

Sean A y B dos magnitudes inversamente proporcionales, con sus respectivos valores correspondientes.

$$\overset{\text{I.P.}}{A \quad B}$$

$$a_1 \longrightarrow b_1$$

$$a_2 \longrightarrow x$$

Como A I.P. B, se cumple:

$$\boxed{a_1 b_1 = a_2 x}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA

Una regla de tres es compuesta cuando intervienen más de dos magnitudes. En general:

(Obreros) I. P. (Rendimiento)
(Obreros) I. P. (Días)
(Obreros) I. P. (horas/ día)
(Obreros) D. P. (Obra)
(Obreros) D. P. (Dificultad)

En consecuencia:

$$\boxed{\frac{(\text{Obreros})\ (\text{Rendimiento})\ (\text{Días})\ (\text{h/d})}{(\text{Obra})\ (\text{Dificultad})} = k}$$

Donde: k es constante.

Ejemplo:

10 obreros pueden cavar una zanja en 8 días a razón de 5 h/d. Calcular en cuántos días otros 24 obreros de doble de rendimiento a razón de 10 h/d podrán cavar otra zanja de doble longitud que la anterior pero dos veces más difícil.

Resolución

	Situación 1	Situación 2
Obreros	10	24
Días	8	n
h/d	5	10
Rendimiento	1	2
Obra	L	2L
Dificultad	1	3

Se cumple:

$$\frac{(\text{Obreros})\ (\text{Rendimiento})\ (\text{Días})\ (\text{h/d})}{(\text{Obra})\ (\text{Dificultad})} = k$$

Reemplazando:

$$\frac{10\times 8\times 5\times 1}{(L)\times 1} = \frac{24\times n\times 10\times 2}{(2L)\times 3}$$

$$\therefore\ n = 5$$

PROMEDIOS O MEDIAS

$$\boxed{\left(\begin{matrix}\text{menor}\\ \text{dato}\end{matrix}\right) \le (\text{promedio}) \le \left(\begin{matrix}\text{mayor}\\ \text{dato}\end{matrix}\right)}$$

ALGUNOS PROMEDIOS

Sean los datos: $\underbrace{a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ \ldots\ ;\ a_n}_{\text{"n" datos}}$

PROMEDIO ARITMÉTICO O MEDIA ARITMÉTICA (M.A)

$$\boxed{M.A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}}$$

Textualmente:

$$\boxed{M.\ A = \frac{(\text{Suma de datos})}{(\text{Cantidad de datos})}}$$

PROMEDIO GEOMÉTRICO O MEDIA GEOMÉTRICA (M.G)

$$M.G=\sqrt[n]{a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n}$$

Textualmente:

$$M.\,G=\sqrt[\text{Cantidad de datos}]{(\text{Producto de datos})}$$

PROMEDIO ARMÓNICO O MEDIA ARMÓNICA (M.H)

$$M.H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Textualmente:

$$M.\,H=\frac{(\text{Cantidad de datos})}{\left(\begin{matrix}\text{Suma de las inversas}\\ \text{de los datos}\end{matrix}\right)}$$

PROPIEDADES

1) Para datos no todos iguales:

$$\left(\begin{matrix}\text{menor}\\ \text{dato}\end{matrix}\right)<M.H<M.G<M.A<\left(\begin{matrix}\text{mayor}\\ \text{dato}\end{matrix}\right)$$

2) Para datos todos iguales:

$$M.H=M.G=M.A=(\text{dato})$$

3) Para dos datos: a y b

- $M.A=\dfrac{a+b}{2}$
- $M.G=\sqrt{ab}$
- $M.H=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ \Rightarrow\ M.H=\dfrac{2ab}{a+b}$

También:

$$M.A\times M.H=M.G^2=a\times b$$

$$(a-b)^2=4(M.A^2-M.G^2)\quad \text{ó}$$

$$(a-b)^2=4(M.A+M.G)(M.A-M.G)$$

CONSIDERACIONES A TENER PRESENTE

i) Para 3 datos "a", "b" y "c", sabemos que:

$$M.H=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\ \Rightarrow\ M.H=\frac{3abc}{ab+ac+bc}$$

ii) $M.A(n\ \#\ s)=\dfrac{S(n\#s)}{n}$

Luego: $S(n\#s)=n\times M.A(n\#s)$

Donde: $\#s$ = números

iii) Progresión aritmética (P.A):

$$\underbrace{a_1\ ;\ a_2}_{+r}\ ;\ \underbrace{\ \ ;\ a_3}_{+r}\ ;\ \ldots\ ;\ \underbrace{a_{n-1}\ ;\ a_n}_{+r}$$

Promedio Aritmético:

$$M.A=\frac{a_1+a_n}{2}$$

iv) Progresión geométrica (P.G):

$$\underbrace{a_1\ ;\ a_2}_{\times k}\ ;\ \underbrace{\ \ ;\ a_3}_{\times k}\ ;\ \ldots\ ;\ \underbrace{a_{n-1}\ ;\ a_n}_{\times k}$$

Promedio Geométrico

$$M.G=\sqrt{a_1\times a_n}$$

v) Alteraciones de la media aritmética (M.A)

$$\underbrace{M.A'}_{\left(\begin{matrix}\text{nuevo}\\ \text{promedio}\end{matrix}\right)}=\underbrace{MA}_{\left(\begin{matrix}\text{promedio}\\ \text{inicial}\end{matrix}\right)}+\underbrace{\Delta MA}_{\left(\begin{matrix}\text{variación del}\\ \text{promedio}\end{matrix}\right)}$$

Donde:

$$\Delta M.A=\frac{\left(\begin{matrix}\text{total que se}\\ \text{aumenta}\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}\text{total que se}\\ \text{disminuye}\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix}\text{Cantidad total}\\ \text{De datos}\end{matrix}\right)}$$

vi) Velocidad promedio (V_p)

$$V_p=\frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}}$$

PROMEDIO PONDERADO

Sean las cantidades: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots\ ;\ a_n$

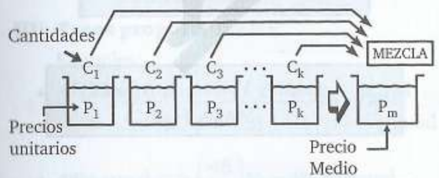
Con sus pesos respectivos: $P_1;\ P_2;\ P_3;\ \ldots\ ;\ P_n$

Siendo "P" su promedio ponderado.

$$P=\frac{a_1\times P_1+a_2\times P_2+a_3\times P_3+\ldots+a_n\times P_n}{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n}$$

REGLA DE MEZCLA

Sea la mezcla:



$$Pm=\frac{(\text{COSTO TOTAL})}{(\text{CANTIDAD TOTAL})}$$

$$Pm=\frac{C_1P_1+C_2P_2+C_3P_3+\ldots+C_kP_k}{C_1+C_2+C_3+\ldots+C_k}$$

Al ser el precio medio un promedio ponderado:

$$\left(\begin{matrix}\text{MENOR}\\ \text{PRECIO}\end{matrix}\right)<Pm<\left(\begin{matrix}\text{MAYOR}\\ \text{PRECIO}\end{matrix}\right)$$

No genera ganancia ni ocasiona pérdida

En toda mezcla:

$$\left(\begin{matrix}\text{GANANCIA}\\ \text{APARENTE}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\text{PÉRDIDA}\\ \text{APARENTE}\end{matrix}\right)$$

Para calcular el precio de venta:

$$P_v=P_m+G$$

Donde la ganancia por lo general es % Pm

Consideraciones a tener presente:

i) Dos mezclas son de la misma calidad, si los ingredientes que la componen se encuentran en la misma proporción.

ii) En la mezcla de dos sustancias, si la ganancia y la pérdida están en la relación de a y b, las cantidades estarán en proporción de b y a.

iii) Si las cantidades a mezclar son iguales, el P_m será la media aritmética de los precios unitarios.

iv) Si las cantidades a mezclar son IP a sus precios, el P_m será la media armónica de los precios unitarios.

MEZCLA ALCOHÓLICA

$$\left(\begin{array}{c}\text{GRADO DE}\\ \text{PUREZA}\end{array}\right)=\frac{(\text{VOLUMEN OH PURO})}{(\text{VOLUMEN TOTAL})}.100\%$$

Luego:

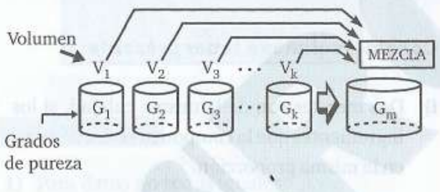
$$0 \le \left(\begin{array}{c}\text{GRADODE}\\ \text{PUREZA}\end{array}\right) \le 1$$

Consideraciones:

- Grado alcohol puro: 100% < > 100°
- Grado agua: 0% < > 0°

<u>Grado Medio</u> (G_m)

Sea la mezcla:



Luego:

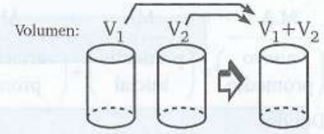
$$Gm=\frac{V_1G_1+V_2G_2+V_3G_3+...+V_kG_k}{V_1+V_2+V_3+...+V_k}$$

NOTA

Sabemos: $\text{DENSIDAD}=\dfrac{\text{MASA}}{\text{VOLUMEN}}$

Luego:

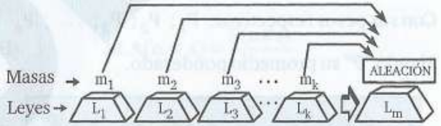
$$\left(\begin{array}{c}\text{DENSIDAD}\\ \text{MEDIA}\end{array}\right)=\frac{(\text{MASA TOTAL})}{(\text{VOLUMEN TOTAL})}$$



$$d_m=\frac{m_1+m_2}{V_1+V_2}=\frac{V_1 \cdot d_1+V_2 \cdot d_2}{V_1+V_2}$$

ALEACIÓN

Sea la aleación:



$$Lm=\frac{L_1m_1+L_2m_2+L_3m_3+...+L_km_k}{m_1+m_2+m_3+...+m_k}$$

Luego: $\text{LEY}=\dfrac{(\text{MASA METAL FINO})}{(\text{MASA TOTAL})}$

$$\text{LIGA}=\frac{(\text{MASA METAL ORDINARIO})}{(\text{MASA TOTAL})}$$

$\text{LEY}+\text{LIGA}=1$ $\qquad 0 \le (\text{LEY}) \le 1$

$\text{LEY}=0 \rightarrow$ Solamente metal ordinario

$\text{LEY}=1 \rightarrow$ Solamente metal fino

REGLA DE INTERÉS

Ejemplo:

$I = S/.120$

$C = S/.600 \longrightarrow M = S/.720$

$r\% = 20\%$ anual

$\longleftarrow t = 1$ año $\longrightarrow$

Donde: C : Capital, t : tiempo, I : Interés
r% : Tasa de interés o rédito
M : Monto

Se observa: $M = C + I$

ALGUNAS CONSIDERACIONES

I)
- 1 mes comercial tiene 30 días
- 1 año comercial tiene 360 días
- 1 año común tiene 365 días
- 1 año bisiesto tiene 366 días

Generalmente se trabaja con el tiempo comercial.

II) Forma práctica para obtener el número de días de los meses del año.

III) Tasas proporcionales:

Ejemplos:

- 8% semestral < > $(8 \times 2)\% = 16\%$ anual
- 20% trimestral < > $(20 \times 4)\% = 80\%$ anual
- 48% anual < > $\left(\dfrac{48}{12}\right)\% = 4\%$ mensual

CLASES DE INTERÉS

INTERÉS SIMPLE

$I = C \times r\% \times t$ $\qquad M = C(1 + r\%\ t)$

NOTA

I) Ejemplos:

TASA	**TIEMPO**
anual	años
mensual	meses
semestral	semestres

➪ Las unidades de tasa y tiempo deben ser homogéneas.

II) En el interés simple, el interés es proporcional al tiempo (siendo la tasa constante)

INTERÉS COMPUESTO

$$M = (1 + r\%)^n \times C$$

Donde: "n" es el # de períodos de capitalización contenidos en el tiempo de préstamo.

<u>NOTA</u>: El período de capitalización determina las unidades de tasa y tiempo.

NOTA

INTERÉS CONTINUO

$$M = C \times e^{r\% \times t}$$

Donde:

M: Monto
C: Capital depositado
e: 2,7182.. (base del logaritmo neperiano)
r%: Tasa
t : Tiempo
} Deben estar en las mismas unidades

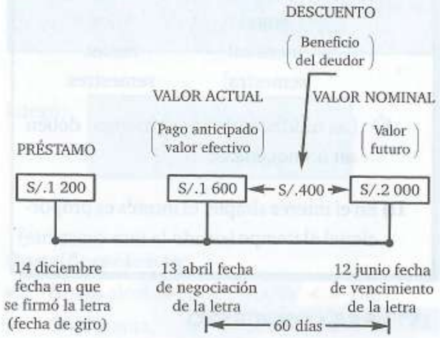
AMORTIZACIONES

Tenemos: n: Número de cuotas o pagos
P: Monto de cuota a amortizar.
C: Precio al contado.
R%: Tasa de interés del período.

$$C = P\left[\frac{(1+R\%)^n-1}{(1+R\%)^n.R\%}\right]$$

REGLA DE DESCUENTO

Ejemplo:



Observamos: $\boxed{D = Vn - Va}$

Donde: Vn : Valor Nominal
Va : Valor Actual
D : Descuento
t : Tiempo de Descuento
r% : Tasa de Descuento

CLASES DE DESCUENTO

DESCUENTO COMERCIAL (Dc)

(Externo; Abusivo; Bancario)

$$\boxed{Dc = r\% \times Vn \times t = Vn - Vac}$$

DESCUENTO RACIONAL (Dr)

(Interno, Matemático)

$$\boxed{Dr = r\%\, Var \times t = Vn - Var}$$

RELACIONES ENTRE EL DESCUENTO COMERCIAL Y DESCUENTO RACIONAL

(Para una misma letra de cambio; tasa y tiempo)

1) $\boxed{\begin{array}{l} Dc > Dr \\ Vac < Var \end{array}}$

2) $Dc = r\% . Vn . t$
$Dr = r\% . Var . t$ } Dividiendo

$$\therefore \boxed{\frac{Dc}{Dr} = \frac{Vn}{Var}}$$

Luego: $\dfrac{Dc}{Dc - Dr} = \dfrac{Vn}{\underbrace{Vn - Var}_{Dr}}$ } Por propiedad de proporciones

$$\therefore \boxed{\frac{Dc . Dr}{Dc - Dr} = Vn}$$

3) $Dc = r\% . Vn . t$
$Dr = r\% . Var . t$ } Restando

$$Dc - Dr = \underbrace{(Vn - Var)}_{Dr} . r\% . t$$

$$\therefore \boxed{Dc - Dr = Dr . r\% . t}$$

4) $\underbrace{Vn}_{Vac + Dc} = \underbrace{Vn}_{Var + Dr}$

$$\therefore \boxed{Var - Vac = Dc - Dr}$$

5) Dr en función de Vn.

$$\boxed{Dr = \frac{Vn.r\%.t}{1 + r\%.t}}$$

6) Relación de Dc y Dr en función de la tasa y el tiempo

$$\boxed{\frac{Dc}{Dr} = 1 + r\%.t}$$

7) Relación entre Vac y Var

$$\boxed{\frac{Vac}{Var} = 1 - (r\%.t)^2}$$

CAMBIO DE LETRAS

$$\boxed{\left[\begin{array}{c}\text{SUMA DE VALORES}\\ \text{ACTUALES DE LAS}\\ \text{LETRAS REEMPLAZADAS}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{SUMA DE VALORES}\\ \text{ACTUALES DE LAS}\\ \text{LETRAS REEMPLAZANTES}\end{array}\right]}$$

VENCIMIENTO COMÚN

Analizamos la expresión matemática para el caso de reemplazar tres letras por una sola:

LETRAS A REEMPLAZAR

r%	r%	r%
$\boxed{Vn_1}$	$\boxed{Vn_2}$	$\boxed{Vn_3}$
t_1	t_2	t_3
Va_1	Va_2	Va_3

LETRA REEMPLAZANTE (LETRA ÚNICA)

r%

$$\boxed{Vn_1 + Vn_2 + Vn_3}$$

$t_{Vc} \rightarrow$ TIEMPO DE VENCIMIENTO COMÚN

Va

Por condiciones de cambio de letra sabemos que:

$Vn = Vn_1 + Vn_2 + Vn_3$
$Va = Va_1 + Va_1 + Va_3$ } Restando, obtenemos los descuentos correspondientes

$$Dc = Dc_1 + Dc_2 + Dc_3$$

$$r\%Vn\ t_{Vc} = r\%\, Vn_1 . t_1 + r\%\, Vn_2 . t_2 + r\%\, Vn_3 . t_3$$

Simplificando la tasa de descuento r%

$$Vn . t_{Vc} = Vn_1 . t_1 + Vn_2 . t_2 + Vn_3 . t_3$$

$$\therefore \boxed{t_{Vc} = \frac{Vn_1 . t_1 + Vn_2 . t_2 + Vn_3 . t_3}{Vn_1 + Vn_2 + Vn_3}}$$

LÓGICA PROPOSICIONAL

SIMBOLIZACIÓN SEGÚN SHOLTZ

TÉRMINO EN EL LENGUAJE NATURAL	SÍMBOLO	NOMBRE DE LA PROPOSICIÓN
No es cierto que ...	~	Negación
.... y	$\wedge$	Conjunción
.... o	$\vee$	Disyunción inclusiva
O bien ... o bien ...	Δ	Disyunción exclusiva
Si ... entonces ...	$\rightarrow$	Condicional
... si y sólo sí ...	$\leftrightarrow$	Bicondicional

Proposición Lógica	p
Verdadero	V
Falso	F

Las proposiciones lógicas pueden ser simples o compuestas.

TABLAS DE VERDAD

- Para 1 proposición

p
V
F

combinaciones : 2^1

- Para 2 proposiciones

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

combinaciones : $2^2 = 4$

- Para 3 proposiciones:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

\# combinaciones : $2^3 = 8$

Luego: Si tenemos "n" proposiciones, el número de combinaciones será: 2^n

ANÁLISIS DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

1. NEGACIÓN

p	~p
V	F
F	V

Nota: $\sim(\sim p) \equiv p$

2. CONJUNCIÓN

p q	$p \wedge q$
V V	V
V F	F
F V	F
F F	F

Nota:
- $p \wedge p \equiv p$
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. DISYUNCIÓN

a) Inclusiva (débil)

p q	$p \vee q$
V V	V
V F	V
F V	V
F F	F

Nota:
- $p \vee p \equiv p$
- $p \vee q \equiv q \vee p$

b) Exclusiva (fuerte)

p q	$p \Delta q$
V V	F
V F	V
F V	V
F F	F

Nota: $p \Delta q \equiv q \Delta p$

4. CONDICIONAL

p q	$p \rightarrow q$
V V	V
V F	F
F V	V
F F	V

p : antecedente
q : consecuente
$p \rightarrow q$; se lee:
"p es suficiente para q"
"q es necesario para p"

Nota:
Condicional Inversa
$\underbrace{q \ldots\ldots}\ p \equiv p \rightarrow q$
porque, ya que,
puesto que; dado que

5. BICONDICIONAL

p q	$p \leftrightarrow q$
V V	V
V F	F
F V	F
F F	V

Nota:
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
- $p \leftrightarrow q \equiv \sim (p \Delta q)$

Veamos las tablas de verdad de los siguientes esquemas moleculares:

1) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

p q	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V V	V	V	V
V F	F	V	V
F V	F	V	V
F F	F	V	F

ES UNA TAUTOLOGÍA

2) $(p \rightarrow q) \Delta (q \vee \sim p)$

p q	$(p \rightarrow q)$	Δ	$(q \vee \sim p)$
V V	V	F	V V F
V F	F	F	F F F
F V	V	F	V V V
F F	V	F	F V V

ES UNA CONTRADICCIÓN

3) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)$

p q	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(p \vee q)$
V V	V	V	V
V F	F	F	V
F V	V	V	V
F F	V	F	F

ES UNA CONTINGENCIA

IMPLICACIÓN LÓGICA

Es aquella condicional que es una tautología.

p q	$\overset{A}{(p \wedge q)}$	$\rightarrow$	$\overset{B}{(p \vee q)}$
V V	V	V	V
V F	F	V	V
F V	F	V	V
F F	F	V	F

TAUTOLOGÍA

Luego: $A \Rightarrow B$

EQUIVALENCIA LÓGICA

Es aquella bicondicional que es una tautología.

p q	$\overset{A}{(p \rightarrow q)}$	$\leftrightarrow$	$\overset{B}{(\sim p \vee q)}$
V V	V	V	F V V
V F	F	V	F F F
F V	V	V	V V V
F F	V	V	V V F

TAUTOLOGÍA

Luego: $A \Leftrightarrow B$

PROPOSICIONES LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

LEYES:

- **Idempotencia**
  $p \wedge p \equiv p$
  $p \vee p \equiv p$

- **Conmutativa**
  $p \wedge q \equiv (q \wedge p)$
  $p \vee q \equiv (q \vee p)$

- **Asociativa**
  $p \wedge q \wedge r \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
  $p \vee q \vee r \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

- **Distributiva**
  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- **Morgan**
  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
  $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

- **Absorción**
  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $\quad p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$
  $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $\quad p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

- **De la condicional**
  $(p \rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$
  $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

- **De la bicondicional**
  $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
  $p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \Delta q)$
  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

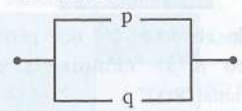
- **Otras**
  $p \vee \sim p \equiv V$ $\quad p \wedge \sim p \equiv F$ $\quad p \vee V \equiv V$
  $p \wedge V \equiv p$ $\quad p \wedge F \equiv F$ $\quad p \vee F \equiv p$

CIRCUITOS LÓGICOS

- En Serie:

•—— p —— q ——• $\equiv p \wedge q$

- En Paralelo:



$\equiv p \vee q$

TEORÍA DE CONJUNTOS

NOCIÓN DE CONJUNTO

Colección o agrupación de objetos.

NOTACIÓN DE UN CONJUNTO

Ejemplo:

F = {1; 2; 3; 4; 5}

Nombre del conjunto — Elementos del conjunto F

RELACIÓN DE PERTENENCIA

ELEMENTO $\xrightarrow[\notin]{\in}$ CONJUNTO

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

1. Por extensión

Ejemplo:

A = {3; 5; 7; 9; 11; 13}

2. Por Comprensión

Ejemplo:

$A = \{2n + 1 / n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 6\}$

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Nos indica la cantidad de elementos diferentes de un conjunto.

$n(A);\ |A|\ \text{o}\ \#(A)$

CUANTIFICADORES

1. Cuantificador Universal.

$\forall x \in A : P(x)$

Para todo elemento "x" que pertenece al conjunto A se cumple la función proposicional "P(x)".

2. Cuantificador Existencial

$\exists x \in A / P(x)$

Existe al menos un elemento "x" del conjunto A tal que cumple la función proposicional "P(x)"

NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES

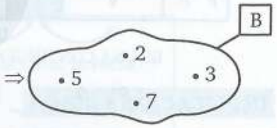
Para el caso del cuantificador universal:

$\sim[\forall x \in A : P(x)] \equiv \exists x \in A / \sim P(x)$

Para el caso del cuantificador existencial:

$\sim[\exists x \in A / P(x)] \equiv \forall x \in A : \sim P(x)$

DIAGRAMAS DE VENN - EULER

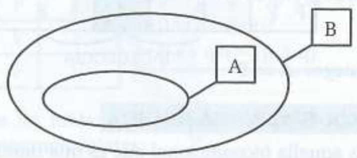
B = {2; 3; 5; 7} ⇒ 

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

1. INCLUSIÓN (⊂)

$A \subset B \leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B)$

Gráficamente:



Se lee: A está incluido en B.
A está contenido en B.
A es subconjunto de B.

2. IGUALDAD (=)

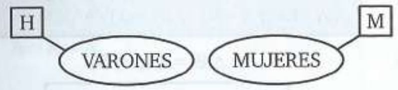
$A = B \leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$

3. CONJUNTOS COMPARABLES

O bien A⊂B o bien B⊂A.

4. CONJUNTOS DISJUNTOS

Gráficamente:



5. CONJUNTOS COORDINABLES O EQUIPOTENTES

De ahí que C y P son coordinables

Además: n(C) = n(P) = 4

CONJUNTOS ESPECIALES

1. VACÍO O NULO (∅)

$A = \{\ \} = \varnothing$

Recuerde:
- $\forall A : \varnothing \subset A$ (El vacío es un subconjunto de todo conjunto)
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$
- $n(\varnothing) = 0$

2. UNITARIO O SINGULAR

Es aquel conjunto que posee un solo elemento.

3. PAR ORDENADO

Se denota:

(a ; b)

Primera componente — Segunda componente

Se lee: Par ordenado a; b

- Igualdad de pares ordenados.

$(a; b) = (c; d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$

4. UNIVERSAL

Gráficamente:

5. CONJUNTO POTENCIA

$P_{(A)} = \{x / x \subset A\}$

Importante:

Dado un conjunto "A"

i) $\left[\begin{array}{c}\text{Número de}\\ \text{subconjuntos}\\ \text{de A}\end{array}\right] = n\left[P_{(A)}\right] = 2^{n(A)}$

ii) Se denomina subconjunto propio de "A" a todo subconjunto de "A" y diferente de "A". Luego:

$\left[\begin{array}{c}\text{Números de}\\ \text{subconjuntos}\\ \text{propios de A}\end{array}\right] = 2^{n(A)} - 1$

iii) $\left[\begin{array}{c}\text{Número de}\\ \text{subconjuntos}\\ \text{k-arios de A}\end{array}\right] = C_k^{n(A)}$

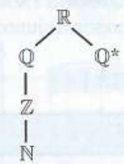
Propiedades:

i) $A \subset B \leftrightarrow P_{(A)} \subset P_{(B)}$

ii) $A \in P_{(B)} \leftrightarrow A \subset B$

DIAGRAMAS ADICIONALES

- **LINEAL:**



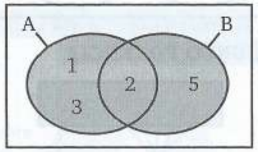
- **DE LEWIS - CARROL:**

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

1. UNIÓN (∪)

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 5\}$$



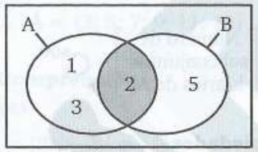
Consecuencia:

- $A \cup U = U$
- $A \cup \varnothing = A$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
  $\leftrightarrow$ A y B son disjuntos.

2. INTERSECCIÓN (∩)

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$



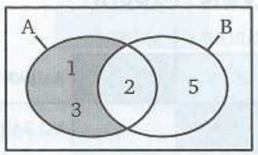
Consecuencia:

- $A \cap U = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
  $\leftrightarrow$ A y B no son disjuntos.

3. DIFERENCIA (–)

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

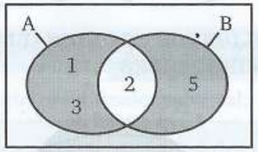
$$A - B = \{1; 3\}$$



4. DIFERENCIA SIMÉTRICA (Δ)

$$A \Delta B = \{x / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \Delta B = \{1; 3; 5\}$$



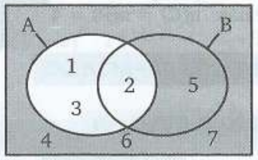
Consecuencia:

- $n(A \Delta B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

5. COMPLEMENTO

$$\overline{A} = A' = C(A) = A^C = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$$

$$A^C = \{4; 5; 6; 7\}$$

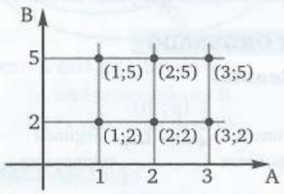


6. CONJUNTO PRODUCTO O PRODUCTO CARTESIANO

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo: Sea $A = \{1; 2; 3\} \wedge B = \{2; 5\}$

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 5), (2; 2), (2; 5), (3; 2), (3; 5)\}$$



Propiedades:

i) $A \times B \neq B \times A \leftrightarrow A \neq B$
ii) $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$
iii) $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

IDEMPOTENCIA
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$

CONMUTATIVA
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
$A \Delta B = B \Delta A$

ASOCIATIVA
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

DISTRIBUTIVA
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

MORGAN
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

DEL COMPLEMENTO
$A \cup A^c = U$
$A \cap A^c = \varnothing$
$(A^c)^c = A$

ABSORCIÓN
$A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$
$A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

ADICIONALES
$A - B = A \cap B^c$
$(U)^c = \varnothing$
$(\varnothing)^c = U$

CONSECUENCIA:

- $\forall A: A - \varnothing = A$
- $\forall A: \varnothing - A = \varnothing$
- $A - B \neq B - A$

RELACIONES BINARIAS

R es una relación de A en B $\leftrightarrow R \subset A \times B$

Ejemplo: Dados los conjuntos:
$A = \{1, 3, 4, 5\} \wedge B = \{1, 2, 3, 4\}$

Podemos definir R de A en B
$R = \{(a,b) \in A \times B / a + b = 5\}$

Luego: $R = \{(1,4), (3,2), (4,1)\}$

Importante:

i) $\left(\begin{array}{c}\#\text{ Relaciones} \\ \text{de A en B}\end{array}\right) = 2^{n(A \times B)}$

ii) Una relación de A en A (relación en A) es cualquiera de los subconjuntos de $A \times A$.

R es una relación de A en A $\leftrightarrow R \subset A \times A = A^2$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

DIAGRAMA SAGITAL O DE FLECHAS

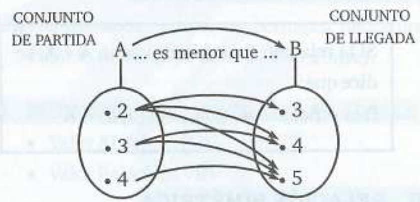
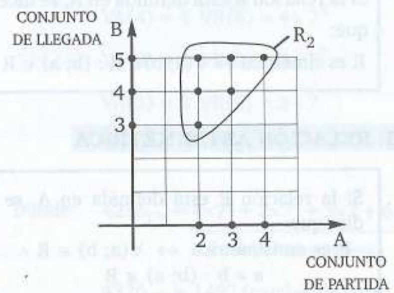
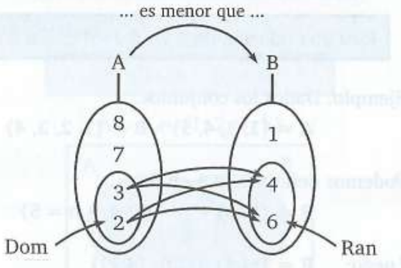


DIAGRAMA CARTESIANO



DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN



DOMINIO DE LA RELACIÓN — RANGO DE LA RELACIÓN

- Dom(R) = {2; 3}
- Dom(R) $\subset$ A
- Ran(R) = {4; 6}
- Ran(R) $\subset$ B

Sea una relación R de A en B:
Dom(R) = {a / (a; b) $\in$ R}
Ran(R) = {b / (a; b) $\in$ R}

RELACIONES BÁSICAS

I. RELACIÓN REFLEXIVA

Si la relación R está definida en A × A, se dice que:
R es reflexiva $\leftrightarrow$ $\forall$ a $\in$ A : (a; a) $\in$ R

II. RELACIÓN SIMÉTRICA

Si la relación R está definida en A, se dice que:
R es simétrica $\leftrightarrow$ $\forall$(a; b) $\in$ R : (b; a) $\in$ R

III. RELACIÓN ANTISIMÉTRICA

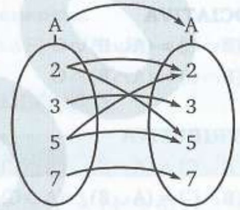
Si la relación R está definida en A, se dice que:
R es antisimétrica $\leftrightarrow$ $\forall$(a; b) $\in$ R $\wedge$ a $\neq$ b : (b; a) $\notin$ R

IV. RELACIÓN TRANSITIVA

Si la relación R está definida en A, se dice que:
R es transitiva $\leftrightarrow$ $\forall$ a ; b ; c $\in$ A :
(a; b) $\in$ R $\wedge$ (b; c) $\in$ R $\rightarrow$ (a; c) $\in$ R

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Gráficamente:



Una relación R definida en A (A $\neq \varnothing$) es de equivalencia sí y sólo sí R es reflexiva, simétrica y transitiva.

CONJUNTO COCIENTE

Si R es una relación de equivalencia definida en A (A $\neq \varnothing$), se llama conjunto cociente al conjunto formado por todas las clases de equivalencias [a] generados por R en A y se denota:

$$\frac{A}{R} = \{[a] \,/\, a \in A\}$$

PRODUCTO CARTESIANO $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

El producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define como:

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y) / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

TEORÍA DE LA NUMERACIÓN

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

1. PRINCIPIO DEL ORDEN

Dado el numeral: 2 485

ORDEN	4	3	2	1
	2	4	8	5
LUGAR (LECTURA)	1	2	3	4

2. PRINCIPIO DE LA BASE

La base es un número entero y mayor que la unidad que nos indica de cuánto en cuánto agrupamos en cualquier orden.

En Base 10:

$\underbrace{\text{10 unidades}}_{\text{10 unidades de orden uno}}$ forman $\underbrace{\text{1 decena}}_{\text{1 unidad de orden dos}}$ (10^1)

$\underbrace{\text{10 decenas}}_{\text{10 unidades de orden dos}}$ forman $\underbrace{\text{1 centena}}_{\text{1 unidad de orden tres}}$ (10^2)

$\underbrace{\text{10 centenas}}_{\text{10 unidades de orden tres}}$ forman $\underbrace{\text{1 millar}}_{\text{1 unidad de orden cuatro}}$ (10^3)

⋮ ⋮

En Base 12:

$\underbrace{\text{12 unidades}}_{\text{12unidades de orden uno}}$ forman $\underbrace{\text{1 docena}}_{\text{1 unidad de orden dos}}$ (12^1)

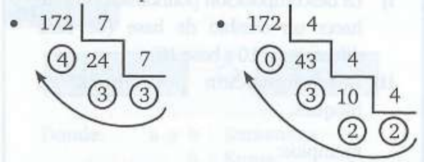
$\underbrace{\text{12 docenas}}_{\text{12 unidades de orden dos}}$ forman $\underbrace{\text{1 gruesa}}_{\text{1 unidad de orden tres}}$ (12^2)

$\underbrace{\text{12 gruesas}}_{\text{12 unidades de orden tres}}$ forman $\underbrace{\text{1 masa}}_{\text{1 unidad de orden cuatro}}$ (12^3)

⋮ ⋮

Ejemplo: Agrupe 172 de 7 en 7 y de 4 en 4.

Procedimiento práctico: Divisiones sucesivas.



$\therefore$ 172 = $334_{(7)}$ $\therefore$ 172 = $2230_{(4)}$

Se observa: $334_{(7)} = 2230_{(4)}$

Consideraciones:

i) $\underbrace{0 \leq \text{(cifras)}}_{\text{enteros}} < \text{(Base)}$

- CIFRA SIGNIFICATIVA:
  Aquella diferente de cero.
- CIFRA MÁXIMA:
  Aquella menor que la base en 1.

ii) En una igualdad de numerales:
"A mayor numeral menor base y viceversa".

iii) Las divisiones sucesivas permiten hacer un cambio de base (de base 10 a otra base).

3. PRINCIPIO DEL VALOR DE LAS CIFRAS

- Valor Absoluto (VA)
- Valor Relativo (VR)

Ejemplo: Sea: $4236_{(7)}$

VA(4) = 4 VR(4) = 4×7^3

VA(2) = 2 VR(2) = 2×7^2

VA(3) = 3 VR(3) = 3×7

VA(6) = 6 VR(6) = 6

Donde: $4236_{(7)} = \underbrace{4{\times}7^3 + 2{\times}7^2 + 3{\times}7 + 6}_{\text{Descomposición polinómica}}$

$4326_{(7)} = 1497$ (cambio de base)

OBSERVACIÓN

i) La descomposición polinómica permite hacer un cambio de base (de base diferente de 10 a base 10).

ii) Descomposición polinómica en bloques.

Ejemplos:

- $23759 = 237 \times 10^2 + 59$
- $424242_7 = 42_7 \times 7^4 + 42_7 \times 7^2 + 42_7$

ALGUNOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

BASE	NOMBRE	CIFRAS QUE UTILIZA
2	Binario	0,1
3	Ternario	0, 1, 2
4	Cuaternario	0, 1, 2, 3
5	Quinario	0, 1, 2, 3, 4
6	Senario	0, 1, 2, 3, 4, 5
7	Heptanario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
8	Octanario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
9	Nonario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
10	Decimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
11	Undecimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
12	Duodecimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
⋮	⋮	⋮
n	Enesimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., (n – 2), (n – 1)

CONVENCIÓN: (10) <> A <> α

(11) <> B <> β

(12) <> C <> γ

⋮

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NÚMERO

Ejemplo: Representar un numeral de tres cifras en base 10.

$$\overline{mnp} = \{100, 101, 102, ..., 998, 999\}$$

$$\begin{array}{ccc} m & n & p \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 10 & 10 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{TOTAL} \\ \text{NUMERALES}\end{array}\right) = 9 \times 10 \times 10 = 900$$

⇦ TOTAL DE VALORES DE LAS VARIABLES

NUMERAL CAPICÚA

Números que se pueden leer de izquierda a derecha y viceversa

Ejemplos:

- $\overline{aa}_{(n)} = \{11; 33_{(5)}; 77_{(9)}; ...\}$
- $\overline{aba}_{(n)} = \{757; 222_{(4)}; 575_{(8)}; ...\}$
- $\overline{abba}_{(n)} = \{4334; (11)22(11)_{(16)}; ...\}$

CASOS ESPECIALES

1. NUMERAL CON CIFRAS MÁXIMAS

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\,....\,(n-1)}_{(n)}}_{\text{"k" cifras}} = n^k - 1$$

2. BASES SUCESIVAS

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots_{\overline{1m}_{(n)}}}}} = a + b + c + ... + m + n$$

También:

- $\left.\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\ddots_{\overline{1a}_{(n)}}}}}\right\}\text{"k" veces} = n + a\,.\,k$
- $\left.\overline{a1}_{\overline{a1}_{\overline{a1}_{\ddots_{\overline{a1}_{(n)}}}}}\right\}\text{"k" veces} = a^k \times n + \dfrac{a^k - 1}{a - 1}$
- $\left.\overline{a1}_{\overline{a1}_{\overline{a1}_{\ddots_{\overline{a1}_{(n)}}}}}\right\}\text{"k" veces} = a^k \times n + \dfrac{a^k - 1}{a - 1}$
- $\overline{a0}_{\overline{b0}_{\overline{c0}_{\ddots_{\overline{m0}_{(n)}}}}} = a \times b \times c \times .... \times m \times n$

3. INTERVALO PARA UN NUMERAL CON CIERTA CANTIDAD DE CIFRAS

$$n^{k-1} \le \underset{\substack{\downarrow \\ \text{"k" cifras}}}{N_{(n)}} < n^k$$

4. Sea: $\overline{abcde}_{(n)} \wedge n$: par

Luego:

* $\overline{abcde}_{(n)}$ es par ↔ e : par
* $\overline{abcde}_{(n)}$ es impar ↔ e : impar

5. Sea : $\overline{abcde}_{(n)} \wedge n$: impar

Luego:

* $\overline{abcde}_{(n)}$ es par ↔ a + b + c + d + e es par.
* $\overline{abcde}_{(n)}$ es impar ↔ a+b+c+d+e es impar

CAMBIOS DE BASE ESPECIAL

1. DE BASE n A BASE n^k

Ejemplo: $8 = 2^3 \rightarrow k = 3$

$$1|110|111|\underbrace{101}_{\text{"k" cifras}}{}_{(2)} = 1|6|7|5_{(8)}$$

2. DE BASE n^k A BASE n

Ejemplo: $9 = 3^2 \rightarrow k = 2$

$$4|7|8|6_{(9)} = \underbrace{11}_{\text{"k" cifras}}|21|22|20_{(3)}$$

CUATRO OPERACIONES EN LOS N

ADICIÓN

$$(a; b) \xrightarrow{+} S \quad ⇨ \quad \boxed{a + b = S}$$

Donde: a y b : Sumandos

S : Suma

Suma por órdenes

Por ejemplo:

$$\begin{array}{rl} 478 + & \\ 593 & \\ \underline{686} & \\ 17 & \leftarrow \text{Suma en el orden 1} \\ 24 & \leftarrow \text{Suma en el orden 2} \\ \underline{15} & \leftarrow \text{Suma en el orden 3} \\ 1757 & \end{array}$$

SUSTRACCIÓN

$$(m; s) \xrightarrow{-} d \quad ⇨ \quad \boxed{m - s = d}$$

Donde: m : Minuendo

s : Sustraendo

d : Diferencia

PROPIEDADES

1) $\boxed{m + s + d = 2m}$

2) Si: $\overline{ab}_{(n)} - \overline{ba}_{(n)} = \overline{xy}_{(n)} \rightarrow x + y = n - 1$

Donde: b < a

3) Si: $\overline{abc}_{(n)} - \overline{cba}_{(n)} = \overline{xyz}_{(n)} \rightarrow x + z = y = n - 1$

Donde: c < a También: a – c = x + 1

4) Si : $\overline{abcd}_{(n)} - \overline{dcba}_{(n)} = \overline{xywz}_{(n)}$

Se cumple:

1er CASO	2do CASO	3er CASO
Si: b > c	Si: b < c	Si: b = c
• x + z = n	• x + z = n – 1	• x + z = n – 1
• y + w = n – 2	• y + w = n – 1	• y = w = n – 1
• a – d = x	• a – d = x + 1	• a – d = x + 1

COMPLEMENTO ARITMÉTICO (C.A.)

Sea: $M = \underbrace{\overline{abc \ldots x}_{(n)}}_{\text{"k" cifras}}$

$$\boxed{CA(M) = \underbrace{1\,000\ldots 0_{(n)}}_{\text{"k" cifras}} - M}$$

Ejemplos:
- $CA(746) = 1000 - 746 = 254$
- $CA(4325_7) = 10000_7 - 4325_7 = 2342_7$

FORMA PRÁCTICA PARA CALCULAR EL C.A. DE UN NÚMERO

Restamos de la base la "primera cifra significativa"

Ejemplos:
- $CA(\overset{9}{4}\,\overset{9}{8}\,\overset{9}{3}\,\overset{10\leftarrow}{5}) = 5165$
- $CA(\overset{6}{6}\,\overset{6}{5}\,\overset{7\leftarrow}{3}\,0\,0_7) = 1400_7$

Tenga en cuenta

i) $CA(CA(312)) = 312$
$CA(CA(CA(423))) = CA(423)$

$$CA(\underbrace{CA(\ldots(CA}_{\text{"n" veces}}(N))\ldots)) = \begin{cases} N \leftrightarrow n \text{ es par} \\ CA(N) \leftrightarrow n \text{ es impar} \end{cases}$$

OBSERVACIÓN

Se cumplirá siempre y cuando la primera cifra de N no sea máxima.

ii) $CA(CA(948)) = 48$

$CA(CA(9972)) = 72$

$CA(CA(5324_{(6)})) = 324_{(6)}$

iii) Diferencia de los Complementos Aritméticos de dos numerales consecutivos.

* Si ambos númerales tienen la misma cantidad de cifras.

Ejemplo:
* $CA(64) - CA(65) = 1$
* $CA(248) - CA(249) = 1$
* $CA(3215_7) - CA(3216_7) = 1$

* Si ambos númerales tienen diferente cantidad de cifras.

Ejemplo:
* $CA(10) - CA(9) = 89$
* $CA(100) - CA(99) = 899$
* $CA(1000) - CA(999) = 8999$
* $CA(100_7) - CA(66_7) = 566_7$
* $CA(1000_7) - CA(666_7) = 5666_7$

MULTIPLICACIÓN

$$\boxed{(a;b) \xrightarrow{\times} P} \Rightarrow \boxed{a \cdot b = P}$$

Donde:
- a : Multiplicando
- b : Multiplicador
- P : Producto
- a y b : Factores

También:

$$\begin{array}{r} 3\,7\,6\ \times \\ 4\,8 \\ \hline 3\,0\,0\,8 \rightarrow \\ 1\,5\,0\,4\ \ \longrightarrow \\ \hline 1\,8\,0\,4\,8 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 376 \times 8 \\ 376 \times 4 \\ \hline \end{array}$$

PRODUCTOS PARCIALES

OBSERVACIONES

i) Si los factores tienen la misma cantidad de cifras.

Ejemplo:

$$48 \times 99 = 47\overbrace{52}^{CA(48)}$$

-1

$$746 \times 999 = 745\overbrace{254}^{CA(746)}$$

-1

ii) También

$632 \times 999 = \ldots 368$

$632 \times 999^2 = \ldots 632$

Luego:

$$\overline{abc} \times 999^n \begin{cases} \ldots \overbrace{xyz}^{CA(abc)}\ ;\ n : \text{impar} \\ \ldots abc\ ;\ n : \text{par} \end{cases}$$

DIVISIÓN

$$\boxed{(D;d) \xrightarrow{\div} q} \Rightarrow \boxed{D \div d = q}$$

Donde: D: Dividendo; d: Divisor; q: Cociente

⇨ DIVISIÓN ENTERA: Incluye al resto o residuo

CLASES DE DIVISIÓN ENTERA

1. EXACTA (r = 0)

En general: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline 0 & q \end{array} \Rightarrow \boxed{D = d \cdot q}$

2. INEXACTA (0 < r)

En general:

$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline & q, \ldots \end{array} \Rightarrow$ q (Por defecto) — q,... — q+1 (Por exceso)

- Por defecto: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$ $\rightarrow \boxed{D = d \cdot q + r}$
- Por exceso: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r_e & q+1 \end{array}$ $\rightarrow \boxed{D = d \cdot (q+1) - r_e}$

Donde:
- q : Cociente por defecto
- q + 1 : Cociente por exceso
- r : Residuo por defecto
- r_e : Residuo por exceso

Propiedades de la División Inexacta:

i) $r + r_e = d$ ii) $0 < (\text{residuo}) < d$

Consecuencias: $r_{\text{mínimo}} = 1$ $r_{\text{máximo}} = d - 1$

Alteraciones de la División Inexacta:

* Por adición de unidades al dividendo:

Ejemplo:

$\begin{array}{l|l} 193 & 27 \\ \hline 4 & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 193 + \underline{20} & 27 \\ \hline 4 + \underline{20} & 7 \end{array}$

En este caso el cociente no varía y el nuevo residuo $4 + 20 = 24$, además $24 < 27$.

$\begin{array}{l|l} 193 & 27 \\ \hline 4 & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 193 + \underline{55} & 27 \\ \hline 4 + \underline{55} & 7 \end{array}$

En este caso variará el cociente y residuo, ya que: $4 + 55 = 59 > 27$

$\begin{array}{l|l} 59 & 27 \\ \hline 5 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 248 & 27 \\ \hline 5 & 9 \end{array}$

Nuevo Residuo — Aumento del cociente

* Al multiplicar por cierto número al dividendo y divisor

Ejemplo:

$\begin{array}{l|l} 74 & 10 \\ \hline 4 & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 148 & 20 \\ \hline 8 & 7 \end{array}$

Observe que hemos duplicado el dividendo y el divisor , el cociente no varió pero el resto se duplica.

Luego: $\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} D.n & d.n \\ \hline r.n & q \end{array}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

* Al multiplicar por un número al dividendo

Ejemplo:

$\begin{array}{l|l} 74 & 10 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$ Multiplicando al dividendo por 6 $\begin{array}{l|l} 74 \times 6 & 27 \\ \hline 4 \times 6 & 7 \times 6 \end{array}$

Donde el resto inicial se debe multiplicar por 6. Pero $4 \times 6 > 10$, entonces:

$\begin{array}{l|l} 4 \times 6 & 10 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$ Nuevo cociente: $7 \times 6 + 2 = \underline{44}$
Nuevo residuo: $\underline{4}$

OBSERVACIÓN

$10^m \le A < 10^n$ $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}^+ \wedge m < n$

Se cumple:
A tiene como mínimo (m + 1) cifras.
A tiene como máximo n cifras.

SUCESIONES

SUCESIÓN NUMÉRICA

Sean los términos de una sucesión:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots;\ a_n$$

Entonces: a_1: primer término
a_2: segundo término
a_3: tercer término
$\vdots \qquad \vdots$
a_n: n-ésimo término o término general de la sucesión

SUCESIONES POLINOMIALES

1. SUCESIÓN POLINOMIAL DE PRIMER ORDEN, LINEAL O PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

$$\boxed{a_n = An + B}$$

Donde A y B son constantes racionales $(A \neq 0)$

DETERMINACIÓN DEL TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

1ra FORMA

$$\boxed{a_n = An + B}$$

2da FORMA

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,r}$$

Donde: "r" es la razón de la P.A.

3ra FORMA

$$\boxed{a_n = a_0 + n \times r}$$

Donde: a_0: término anterior al primero

NOTA

1) # de términos de una P.A. (forma práctica)

- $n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1$
- $n = \dfrac{a_n - a_0}{r}$

2) Si una P.A. tiene una cantidad impar de términos:

$$\boxed{a_C = \frac{a_1 + a_n}{2}}$$

Donde: a_C: término central de la P.A

3) La suma de los términos equidistantes de los extremos es constante:

$$\boxed{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots}$$

2. SUCESIÓN POLINOMIAL DE SEGUNDO ORDEN

$$\boxed{a_n = An^2 + Bn + C}$$

Donde: A; B y C son constantes racionales $(A \neq 0)$

DETERMINACIÓN DEL TÉRMINO GENERAL DE UNA SUCESIÓN DE SEGUNDO ORDEN

En general:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_0; & & a_1; & & a_2; & & a_3; & & a_4; & & a_5; \ \dots; & a_n \\ & d_0 & & d_1 & & d_2 & & d_3 & & d_4 & & \\ & & R & & R & & R & & R & & & \end{array}$$

El término general es de la forma:

$$\boxed{a_n = An^2 + Bn + C}$$

Donde las constantes A, B y C se calculan así:

$$\boxed{A = \frac{R}{2}} \qquad \boxed{B = d_0 - \frac{R}{2}} \qquad \boxed{C = a_0}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Sea la P.G: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ \dots;\ a_n$
$\times q \quad \times q \quad \times q \quad \times q$ ← razón geométrica

Luego: $\boxed{a_n = a_1 \times q^{n-1}}$

NOTA

1) Si una P.G. tiene una cantidad impar de términos:

$$\boxed{a_C = \sqrt{a_1 \times a_n}}$$

Donde: a_C: término central de la P.G

2) El producto de los términos equidistantes de los extremos es constante:

$$\boxed{a_1 \times a_n = a_2 \times a_{n-1} = a_3 \times a_{n-2} = \dots}$$

SERIES

En general:

sucesión	$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots;\ a_n$
serie	$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \underbrace{S}_{\text{Valor de la serie}}$

NOTA

Notación:

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Donde $\sum$: letra griega llamada sigma y denota sumatoria

PROPIEDADES

1) $\boxed{\sum_{i=1}^{n} C = C \times n}$ Donde: C es una constante

2) $\boxed{\sum_{i=1}^{n} C \times a_i = C \times \sum_{i=1}^{n} a_i}$

3) $\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i}$

4) $\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1}$

(Se le conoce como la propiedad telescópica)

SUMATORIAS NOTABLES

Suma de los "n" primeros números $\mathbb{Z}^+$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suma de los "n" primeros números pares:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$$

Suma de los "n" primeros números impares:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Suma de los "n" primeros cuadrados perfectos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suma de los "n" primeros cubos perfectos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Suma de los "n" primeros productos binarios consecutivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + \dots$$

$$\dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Suma de los "n" primeros productos ternarios consecutivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(1+2) = 1\times2\times3 + 2\times3\times4 + 3\times4\times5 + \dots$$

$$\dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

SUMA DE TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA (SERIE ARITMÉTICA)

Sea la P.A: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots;\ a_n$

$r \quad r \longrightarrow$ razón de la P.A

Se tiene la serie aritmética:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

El valor de la serie aritmética es:

$$\boxed{S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n}$$

Donde: n: # de términos de la P.A.

S: suma de términos de la P.A.

SUMA DE TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN DE SEGUNDO ORDEN

Sea: $\boxed{a_n = An^2 + Bn + C}$

Luego: $S = \sum_{1}^{n} a_n = A\sum_{1}^{n} n^2 + B\sum_{1}^{n} n + C\,.\,n$

SUMA DE TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

SERIE GEOMÉTRICA FINITA

Sea la P.G: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots;\ a_n$

$\times q \quad \times q \longrightarrow$ razón de la P.G.

Se tiene la serie geométrica:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

El valor de la serie geométrica es:

$$\boxed{S = a_1\left[\frac{q^n - 1}{q - 1}\right]}$$

Donde: n: # de términos de la P.G.

S: suma de términos de la P.G.

SERIE GEOMÉTRICA DECRECIENTE DE INFINITOS TÉRMINOS (0 < q < 1)

Se observa:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Donde: S : Suma límite de los términos de una Progresión Geométrica

q : Razón geométrica $(0 < q < 1)$

DETERMINACIÓN DE LA CANTIDAD DE CIFRAS USADAS EN UNA SUCESIÓN NATURAL

Sea la sucesión natural:

$1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\ ;\ N$

Donde: N es el # de la última página que tiene "k" cifras

$$\boxed{C_C = (N+1)k - \underbrace{111\dots1}_{\text{"k" cifras}}}$$

NOTA

i) (cifra) <> $\left(\begin{matrix}\text{tipo de}\\ \text{imprenta}\end{matrix}\right)$ <> (dígito)

ii) (1 hoja) <> (2 páginas)

iii) En otros sistemas de numeración:

Sea la sucesión natural en base "b":

$1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots\ ;\ N_{(b)}$

$$\boxed{C_C = \left[N_{(b)} + 1\right]k - \underbrace{111\dots1}_{\text{"k" cifras}}{}_{(b)}}$$

TEORÍA DE DIVISIBILIDAD

Sea: $\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline 0 & k \end{array}$ Es decir: $A = B \times k$

Donde: $A \in \mathbb{Z};\ B \in \mathbb{Z}^+;\ k \in \mathbb{Z}$

$\hookrightarrow$ MÓDULO

Se afirma: "A es divisible entre B"

"A es múltiplo de B"

"B es un divisor de A"

"B es un factor de A"

OBSERVACIÓN

DIVISIBLE < > MÚLTIPLO

DIVISOR < > FACTOR

El enunciado: "A es múltiplo de B" se denotará así: $A = \overset{o}{B}$ ó $A = \overset{o}{\overline{B}}$ ó $A = Bk\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

NOTA: Si un número es múltiplo de B, será múltiplo de cualquier divisor de B.

NÚMEROS NO DIVISIBLES

En general:

POR DEFECTO: $\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline r_d & k \end{array}$ POR EXCESO: $\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline r_e & (k+1) \end{array}$

$A = \overset{o}{B} + r_d$ ó $A = \overset{o}{B} - r_e$

$$r_d + r_e = B$$

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

LAS OPERACIONES CON MÚLTIPLOS DE UN MISMO MÓDULO

ADICIÓN

Si: $a + b = \overset{o}{n}$, entonces:

$a = \overset{o}{n} \wedge b = \overset{o}{n}$ ó $a = \overset{o}{n} + r \wedge b = \overset{o}{n} - r$

SUSTRACCIÓN:

Si: $a - b = \overset{o}{n}$, entonces:

$a = \overset{o}{n} \wedge b = \overset{o}{n}$ ó $\underbrace{a = \overset{o}{n} + r \wedge b = \overset{o}{n} + r}$

Se afirma que a y b son congruentes respecto al módulo n, ya que dejan el mismo residuo, lo cual se denota: $a \equiv b$ (mód n)

MULTIPLICACIÓN:

$$\boxed{\overset{o}{n} \times k = \overset{o}{n}\ ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

POTENCIACIÓN:

$$\boxed{(\overset{o}{n})^k = \overset{o}{n}\ ;\ k \in \mathbb{Z}^+}$$

OBSERVACIONES

1) $(\overset{o}{n} + a)(\overset{o}{n} + b)(\overset{o}{n} + c)\dots(\overset{o}{n} + m) = \overset{o}{n} + a \times b \times c \times \dots \times m$

2) $\overline{abcdef}_{(n)} = \begin{cases} \overset{o}{n} + f \\ \overset{o}{(n^2)} + \overline{ef}_{(n)} \\ \overset{o}{(n^3)} + \overline{def}_{(n)} \end{cases}$

3) $(\overset{o}{n} + r)^k = \overset{o}{n} + r^k\ ;\ k \in \mathbb{Z}^+$

4) $(\overset{o}{n} - r)^k = \begin{cases} \overset{o}{n} + r^k \leftrightarrow k : \text{par} \\ \overset{o}{n} - r^k \leftrightarrow k : \text{impar} \end{cases}$

SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE VARIOS MÓDULOS, SERÁ MÚLTIPLO DE MENOR MÚLTIPLO COMÚN DE DICHOS MÓDULOS

Obs: Menor Múltiplo Común: MCM

$$\begin{array}{l} N = \overset{o}{a} \pm r \\ N = \overset{o}{b} \pm r \\ N = \overset{o}{c} \pm r \end{array} \Rightarrow N = \overset{o}{\text{MCM}(a;\ b;\ c)} \pm r$$

Si: $A \times B = \overset{\circ}{n}$ y A no tiene divisores comunes con n, excepto la unidad entonces B es $\overset{\circ}{n}$.
Donde $\{A, B\} \subset \mathbb{Z}^+$

RESTOS POTENCIALES (R.P.)

Restos potenciales de b respecto al módulo m.

Forma general: $b^n = \overset{\circ}{m} + r_n$

Donde: $\{b, m\} \subset \mathbb{Z}^+ \wedge$ n: entero no negativo

Ejemplo: Halle los restos potenciales de 2 respecto al módulo 7.

⇨ $2^n = \overset{\circ}{7} + r_n$

$$\left.\begin{array}{l} 2^0 = \overset{\circ}{7} + 1 \\ 2^1 = \overset{\circ}{7} + 2 \\ 2^2 = \overset{\circ}{7} + 4 \end{array}\right\}$$

La cantidad de residuos que se repiten en forma ordenada y periódica, se denomina gaussiano (g)
En el ejemplo: g = 3

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = \overset{\circ}{7} + 1 \\ 2^4 = \overset{\circ}{7} + 2 \\ 2^5 = \overset{\circ}{7} + 4 \\ \vdots \quad \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^{\overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{7}+1 \\ 2^{\overset{\circ}{3}+1} = \overset{\circ}{7}+2 \\ 2^{\overset{\circ}{3}+2} = \overset{\circ}{7}+4 \end{array}$$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

CRITERIOS POR 2^n Y 5^n $(n \in \mathbb{Z}^+)$

CRITERIOS POR 2 Y 5

Sea: $N = \overline{abcde}$

$N = \overset{\circ}{2} \leftrightarrow e = \overset{\circ}{2} \to e = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$N = \overset{\circ}{5} \leftrightarrow e = \overset{\circ}{5} \to e = \{0, 5\}$

CRITERIOS POR 4 Y 25

Sea: $N = \overline{abcde}$

$N = \overset{\circ}{4} \leftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{4} \vee 2d + e = \overset{\circ}{4}$

$N = \overset{\circ}{25} \leftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{25} \to \overline{de} = \{00, 25, 50, 75\}$

CRITERIOS POR 8 Y 125

Sea: $N = \overline{abcde}$

$N = \overset{\circ}{8} \leftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{8} \vee 4c + 2d + e = \overset{\circ}{8}$

$N = \overset{\circ}{125} \leftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{125} \to \overline{cde} = \{000, 125, \ldots, 875\}$

CRITERIOS POR 3 Y 9

Sea: $N = \overline{abcde}$

$N = \overset{\circ}{3} \leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{3}$

$N = \overset{\circ}{9} \leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$

CRITERIO POR 11

Sea: $N = \overline{\underset{-}{a}\,\underset{+}{b}\,\underset{-}{c}\,\underset{+}{d}\,\underset{-}{e}\,\underset{+}{f}} \leftarrow$

$N = \overset{\circ}{11} \leftrightarrow -a + b - c + d - e + f = \overset{\circ}{11}$

CRITERIO POR 7

Sea: $N = \overline{\underset{-2}{a}\;\underset{-3}{b}\;\underset{-1}{c}\;\underset{+2}{d}\;\underset{+3}{e}\;\underset{+1}{f}} \leftarrow$

$N = \overset{\circ}{7} \leftrightarrow -2a - 3b - c + 2d + 3e + f = \overset{\circ}{7}$

CRITERIO POR 13

Sea: $N = \overline{\underset{+4}{a}\;\underset{+3}{b}\;\underset{-1}{c}\;\underset{-4}{d}\;\underset{-3}{e}\;\underset{+1}{f}} \leftarrow$

$N = \overset{\circ}{13} \leftrightarrow 4a + 3b - c - 4d - 3e + f = \overset{\circ}{13}$

CRITERIOS POR 33 Y 99

Sea: $N = \overline{abcdef}$

$N = \overset{\circ}{33} \leftrightarrow \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = \overset{\circ}{33}$

$N = \overset{\circ}{99} \leftrightarrow \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = \overset{\circ}{99}$

CRITERIO POR (n − 1) EN BASE n

$\overline{abcdef}_{(n)} = \overset{\circ}{(n-1)} \leftrightarrow a+b+c+d+e+f = \overset{\circ}{(n-1)}$

CRITERIO POR (n + 1) EN BASE n

$\overline{\underset{-}{a}\,\underset{+}{b}\,\underset{-}{c}\,\underset{+}{d}\,\underset{-}{e}\,\underset{+}{f}}_{(n)} \leftarrow = \overset{\circ}{(n+1)} \leftrightarrow -a+b-c+d-e+f = \overset{\circ}{(n+1)}$

CONSIDERACIONES

i) Todo número impar positivo elevado a un exponente par positivo será: $\overset{\circ}{8} + 1$.

ii) Si un numeral es $\overset{\circ}{9} + r$, no interesa en orden como aparezcan sus cifras, seguirá siendo $\overset{\circ}{9} + r$. Es decir:

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{9} + r \Rightarrow \begin{cases} \overline{bca} = \overset{\circ}{9} + r \\ \overline{abc} = \overset{\circ}{9} + r \\ \overline{cba} = \overset{\circ}{9} + r \end{cases}$$

iii) Si: $\overline{abcde} = \overset{\circ}{9}$

Entonces:

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{9} + \overline{ab} + \overline{cde}$

$= \overset{\circ}{9} + \overline{ab} + \overline{cd} + e$

iv) Se dice que dos números A y B enteros son congruentes con respecto al módulo m, $(m \in \mathbb{Z}^+)$ si al dividir A y B, respectivamente por m, dan el mismo residuo.

Notación: $A \equiv B$ (módulo m).
Se lee: A es congruente con B, con respecto al módulo m.

ESTUDIO DE LOS DIVISORES POSITIVOS DE UN NÚMERO

Trabajaremos en el siguiente conjunto:

$\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \ldots\}$

Se clasifican así:

I. NÚMEROS SIMPLES: Tienen a lo más dos divisores.

1. **La Unidad:** Tiene un sólo divisor que es el mismo.
2. **Los Números Primos:** tienen exactamente dos divisores que son: la unidad y ellos mismos.

II. NÚMEROS COMPUESTOS: Tienen más de dos divisores.

- Conjunto de los números primos:
  {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...}

NOTA
Todo número compuesto tiene por lo menos un divisor que es primo.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS PRIMOS

i) Es un conjunto infinito

ii) 2: Es el único que es par

iii) 2 y 3: son los únicos que son consecutivos

iv) 3; 5; 7: única terna de impares consecutivos

v) Si $p > 2$ y p: primo, entonces:
$p = \overset{\circ}{4} + 1 \vee p = \overset{\circ}{4} - 1$

vi) Si $p > 3 \wedge$ p: primo, entonces:
$p = \overset{\circ}{6} + 1 \vee p = \overset{\circ}{6} - 1$

ALGORITMO PARA DETERMINAR SI UN NÚMERO ES PRIMO

1) Se extrae la raíz cuadrada aproximada del número (se toma la parte entera).

2) Se consideran los primos menores o iguales a dicha parte entera.

3) Aplicamos divisibilidad:
- * Si el número no es divisible por alguno de los primos mencionados, el número será primo.
- * Si el número es divisible por al menos uno de los primos mencionados, el número no es primo.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI (PESI)

Ejemplo: Los números 8; 10 y 15 son PESI (primos relativos o coprimos), porque al observar sus divisores:

#	Divisores
8	1; 2; 4; 8
10	1; 2; 5; 10
15	1; 3; 5; 15

La unidad es el único divisor común.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI DOS A DOS

Ejemplo: Los números 8; 9 y 23 son PESI dos a dos, ya que:

#	Divisores	
8	1,2,4,8	➪ 8 y 9 son PESI
9	1,3,9	

#	Divisores	
8	1,2,4,8	➪ 8 y 23 son PESI
23	1,23	

#	Divisores	
9	1,3,9	➪ 9 y 23 son PESI
23	1,23	

PROPIEDADES

1) Dos o más números consecutivos siempre son PESI.

2) Dos o más impares consecutivos son PESI.

3) Si un grupo de números es PESI dos a dos, entonces el grupo es PESI; lo contrario no necesariamente se cumple.

4) Si dos números a y b son PESI, entonces:
- * a, b y (a + b) son PESI.
- * a, b y (a – b) son PESI (a > b).

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

(También llamado teorema de Gauss o Descomposición Canónica)

$$\boxed{N = A^a \times B^b \times C^c} \text{ .... (D.C.)}$$

Donde:
- A; B y C: Números primos ($A \neq B \neq C$)
- $\{a; b; c\} \subset \mathbb{Z}^+$

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

Sea: $N = A^a \times B^b \times C^c$ .... (D.C.)

1) TABLA DE DIVISORES

Ejemplo: $200 = 2^3 \times 5^2$

	×	1	2^1	2^2	2^3
		divisores de 2^3			
divisores de 5^2	1	1	2	4	8
	5^1	5	10	20	40
	5^2	25	50	100	200

2) CANTIDAD DE DIVISORES (CD)

$$\boxed{CD(N) = (a+1)(b+1)(c+1)}$$

$$\boxed{\underset{(\text{de N que son } \overset{o}{m})}{CD} = CD\left(\frac{N}{m}\right)}$$

3) SUMA DE DIVISORES (SD)

$$\boxed{SD(N) = \left[\frac{A^{a+1}-1}{A-1}\right]\left[\frac{B^{b+1}-1}{B-1}\right]\left[\frac{C^{c+1}-1}{C-1}\right]}$$

$$\boxed{\underset{(\text{de N que son } \overset{o}{m})}{SD} = m \times SD\left(\frac{N}{m}\right)}$$

- * **NÚMEROS DEFECTUOSOS**

  $SD_{\substack{\text{Propios}\\ \text{de N}}} < N$

- * **NÚMEROS ABUNDANTES**

  $SD_{\substack{\text{Propios}\\ \text{de N}}} > N$

- * **NÚMEROS PERFECTOS**

  $SD_{\substack{\text{Propios}\\ \text{de N}}} = N$

- * **NÚMEROS AMIGOS**

  A y B son amigos ↔

  $SD_{\substack{\text{Propios}\\ \text{de A}}} = B \wedge SD_{\substack{\text{Propios}\\ \text{de B}}} = A$

4) SUMA DE LAS INVERSAS DE LOS DIVISORES (SID)

$$\boxed{SID(N) = \frac{SD(N)}{N}}$$

$$\boxed{\underset{(\text{de N que son } \overset{o}{m})}{SID} = \frac{SD\left(\frac{N}{m}\right)}{N}}$$

5) PRODUCTO DE LOS DIVISORES (PD)

$$\boxed{PD(N) = N^{\frac{CD(N)}{2}}}$$

$$\boxed{PD(N) = \sqrt{N^{CD(N)}}}$$

$$\boxed{\underset{(\text{de N que son } \overset{o}{m})}{PD} = m^{CD\left(\frac{N}{m}\right)} \times PD\left(\frac{N}{m}\right)}$$

ALGUNAS CONSIDERACIONES

i) $\boxed{CD(N) = CD_{simples} + CD_{comp}}$

$\boxed{CD(N) = 1 + CD_{primos} + CD_{comp}}$

$\boxed{CD_{\text{propios de N}} = CD(N) - 1}$

ii) $\boxed{SD_{(N)} = SD_{simples} + SD_{compuestos}}$

$\boxed{SD(N) = 1 + SD_{primos} + SD_{compuestos}}$

$\boxed{SD_{\text{propios de N}} = SD(N) - N}$

iii) Cantidad de formas de expresar un número como el producto de 2 factores [$F_{(N)}$]

$$\boxed{F_{(N)} = \begin{cases} \dfrac{CD(N)}{2} & ;\text{ Si CD(N) es par} \\[2ex] \dfrac{CD(N)+1}{2} & ;\text{ Si CD(N) es impar} \end{cases}}$$

iv) Descomposición canónica del factorial de un número

Forma práctica:
(divisiones sucesivas y se suman los cocientes)

Ejemplo: Sea: $10! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$

- Hallando "a":

$$\begin{array}{l} 10 \,\underline{|\, 2} \\ \quad ⑤ \,\underline{|\, 2} \\ \qquad ② \,\underline{|\, 2} \\ \qquad\quad ① \end{array}$$

$a = 5 + 2 + 1 = 8$

- Hallando "b":

$$\begin{array}{l} 10 \,\underline{|\, 3} \\ \quad ③ \,\underline{|\, 3} \\ \qquad ① \end{array}$$

$b = 3 + 1 = 4$

- Hallando "c":

$$\begin{array}{l} 10 \,\underline{|\, 5} \\ \quad ② \end{array}$$

$c = 2$

- Hallando "d":

$$\begin{array}{l} 10 \,\underline{|\, 7} \\ \quad ① \end{array}$$

$d = 1$

$\therefore\ 10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1$

FUNCIÓN DE EULER O INDICADOR DE UN NÚMERO ($\varnothing(N)$ Ó $\varphi(N)$)

Para el número primo p

$$\overbrace{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (p-1)}^{(p-1)\text{ números menores que p y PESI con p}},\ p$$

$$\boxed{\varnothing(p) = p - 1}$$

Para el número cuya descomposición canónica sea p^a

$$\boxed{\varnothing(p^a) = p^{a-1}(p-1)}$$

Para el número $N = A^a \times B^b \times C^c$ ...... (DC)

$$\boxed{\varnothing(N) = A^{a-1}(A-1)\times B^{b-1}(B-1)\times C^{c-1}(C-1)}$$

PROPIEDAD

Si $N > 1$, la suma de los números PESI con N y menores que N es:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}N \times \varnothing(N)}$$

TEOREMA DE EULER

Si $m > 1$, además a y m son PESI entonces:

$$\boxed{a^{\varnothing(m)} = \overset{o}{m} + 1}$$

TEOREMA DE FERMAT

Si "p" es primo y $a \neq \overset{o}{p}$; entonces:

$$\boxed{a^{(p-1)} = \overset{o}{p} + 1}$$

TEOREMA DE WILSÓN

Si "p" es primo, entonces:

$$\boxed{(p-1)! = \overset{o}{p} - 1}$$

COROLARIO:

Si p es primo, entonces: $(p-2)! = \overset{o}{p} + 1$

Si p es primo y $p \geq 3$ afirmamos que:

$$\boxed{(p-3)! = \overset{o}{p} + \left(\frac{p-1}{2}\right)}$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

Ejemplo: Sean los #s: 18 y 24

#	divisores $\mathbb{Z}^+$
18	1; 2; 3; 6; 9; 18
24	1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24

⇨ Divisores comunes de 18 y 24: 1; 2; 3; 6

⇨ Mayor divisor común: 6

$\therefore$ MCD(18; 24) = 6

NOTA

1)

	divisores $\mathbb{Z}^+$
MCD(18; 24) = 6	1; 2; 3; 6

De lo anterior se cumple que:

$$\left[CD_{\text{Comunes de A y B}}\right] = \left[CD_{MCD(A;\,B)}\right]$$

2) Dado un número de grupos y su MCD, cualquiera de los números es múltiplo de su MCD.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.)

Ejemplo: Sean los #s: 18 y 24

#	múltiplos $\mathbb{Z}^+$
18	18; 36; 54; 72; 90; 108; 126; 144; 162; 180; 198; 216; ...
24	24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240; 264; 288; ...

⇨ Múltiplos comunes de 18 y 24: 72; 144; 216; ...

⇨ Menor múltiplo común: 72

$\therefore$ MCM(18; 24) = 72

NOTA

1)

	múltiplos $\mathbb{Z}^+$
MCM(18; 24) = 72	72; 144; 216; ...

De lo anterior se cumple que:

$$[\text{Múltiplos comunes de A y B}] = \overset{o}{\overline{MCM(A;\,B)}}$$

2) Dado un grupo de números y su MCM, cualquiera de los números es divisor de su MCM.

MÉTODOS PARA CALCULAR EL MCD Y EL MCM

POR DESCOMPOSICIÓN SIMULTÁNEA

PARA EL MCD

- Calculemos el MCD de los números 192; 240 y 360

$$\begin{array}{ccc|c}
192 & 240 & 360 & 2 \\
96 & 120 & 180 & 2 \\
48 & 60 & 90 & 2 \\
24 & 30 & 45 & 3 \\
8 & 10 & 15 &
\end{array}$$

PESI

Observación:

Si: MCD(A; B; C) = d

$\to A = d(p)$

$\to B = d(q)$ PESI

$\to C = d(r)$

MCD(192; 240; 360) = $2\times2\times2\times3$

$\therefore$ MCD(192; 240; 360) = $2^3 \times 3 = 24$

PARA EL MCM

Ejemplo: Calculemos el MCM de los números 192; 240 y 360

$$\begin{array}{ccc|c}
192 & 240 & 360 & 2 \\
96 & 120 & 180 & 2 \\
48 & 60 & 90 & 2 \\
24 & 30 & 45 & 3 \\
8 & 10 & 15 & 2 \\
4 & 5 & 15 & 2 \\
2 & 5 & 15 & 2 \\
1 & 5 & 15 & 3 \\
1 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Observación:

Si: MCM(A; B; C) = m

$\to m = A \times (p)$

$\to m = B \times (q)$ PESI

$\to m = C \times (r)$

MCM(192; 240; 360) = 2×2×2×3×2×2×2×3×5

$\therefore$ MCM(192; 240; 360) = $2^6 \times 3^2 \times 5 = 2880$

POR DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

PARA EL MCD

Ejemplo: Calculemos el MCD de los números:

$$A = 2^6 \times \underline{3}^{2} \times 5^4 \times 7^3$$

$$B = \underline{2}^{3} \times 3^4 \times 5^6 \times 11^1$$

$$C = 2^5 \times 3^3 \times \underline{5}^{3} \times 13^2$$

$$\therefore\ MCD(A; B; C) = \underline{2}^{3} \times \underline{3}^{2} \times \underline{5}^{3}$$

PARA EL MCM

Ejemplo: Calculemos el MCM de los números:

$$A = \underline{2}^{6} \times 3^2 \times 5^4 \times \underline{7}^{3}$$

$$B = 2^3 \times \underline{3}^{4} \times \underline{5}^{6} \times \underline{11}^{1}$$

$$C = 2^5 \times 3^3 \times 5^3 \times \underline{13}^{2}$$

$$\therefore\ MCM(A; B; C) = \underline{2}^6 \times \underline{3}^4 \times \underline{5}^6 \times \underline{7}^3 \times \underline{11}^1 \times \underline{13}^2$$

POR DIVISIONES SUCESIVAS (ALGORITMO DE EUCLIDES)

Sólo para calcular el MCD de dos números $\mathbb{Z}^+$.

Propiedad: Dada la división inexacta:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

Se cumple: $\boxed{MCD(D; d) = MCD(d; r)}$

Ejemplo: Calculemos el MCD de 403 y 91 por el métodos de las divisiones sucesivas.

$$\begin{array}{l|l} 403 & 91 \\ \hline 39 & 4 \end{array} \Rightarrow MCD(403; 91) = MCD(91; 39)$$

$$\begin{array}{l|l} 91 & 39 \\ \hline 13 & 2 \end{array} \Rightarrow MCD(91; 39) = MCD(39; 13)$$

$$\begin{array}{l|l} 39 & 13 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Rightarrow MCD(39; 13) = 13$$

El proceso termina cuando la división es exacta; luego, ordenamos en un esquema las divisiones anteriores:

cocientes sucesivos	4	2	3
403	91	39	13
residuos sucesivos	39	13	0

$\Rightarrow$ MCD(403; 91) = 13

En general:

cocientes sucesivos	q_1	q_2	q_3	...	q_{n-1}	q_n
A	B	r_1	r_2	...	r_{n-2}	r_{n-1}
residuos sucesivos	r_1	r_2	r_3	...	r_{n-1}	0

$\Rightarrow$ $MCD(A; B) = r_{n-1}$

OBSERVACIÓN

Las divisiones pueden ser por defecto, por exceso o ambas.

PROPIEDADES

1) Dados dos números A y B; si: $A = \overset{\circ}{B}$

$\rightarrow$ $\boxed{MCD(A; B) = B}$

$\rightarrow$ $\boxed{MCM(A; B) = A}$

NOTA

En el caso de factoriales, el MCD es el menor de ellos y el MCM el mayor de ellos.

2) Si: A y B son PESI

$\rightarrow$ $MCD(A; B) = 1$

$\rightarrow$ $MCM(A; B) = A \times B$

3) • $MCD(A; B; C) = d$

$$\rightarrow \begin{cases} \bullet\ MCD(A \times k;\ B \times k;\ C \times k) = d \times k \\ \bullet\ MCD\left(\dfrac{A}{k};\ \dfrac{B}{k};\ \dfrac{C}{k}\right) = \dfrac{d}{k} \\ \bullet\ MCD\ (A^k, B^k, C^k) = d^k \end{cases}$$

• $MCM(A; B; C) = m$

$$\rightarrow \begin{cases} \bullet\ MCM(A \times k;\ B \times k;\ C \times k) = m \times k \\ \bullet\ MCM\left(\dfrac{A}{k};\ \dfrac{B}{k};\ \dfrac{C}{k}\right) = \dfrac{m}{k} \\ \bullet\ MCM\ (A^k, B^k, C^k) = m^k \end{cases}$$

Donde: $k \in \mathbb{Z}^+$

4) Sea: $MCD(A; B; C; D) = d$

$\rightarrow$ $MCD[MCD(A; B); MCD(C; D)] = d$

$\rightarrow$ $MCD[MCD(A; B; C); D] = d$

Sea: $MCM(A; B; C; D) = m$

$\rightarrow$ $MCM[MCM(A; B); MCM(C; D)] = m$

$\rightarrow$ $MCM[MCM(A; B; C); D] = m$

5) Dados 2 números A y B

Si: $MCD(A; B) = d$

$\rightarrow A = dp$

$\rightarrow B = dq$

donde p y q son PESI

Calculemos el MCM de A y B:

$$\boxed{MCM(A; B) = MCM(dp; dq) = d \times p \times q}$$

Multipliquemos los números A y B:

$$\boxed{\begin{aligned} A \times B &= dp \times dq = d \times dpq \\ A \times B &= MCD(A; B) \times MCM(A; B) \end{aligned}}$$

6) Dados los numerales de cifras máximas:

$$A = \underbrace{(n-1)(n-1)(n-1)...(n-1)}_{\text{"a" cifras}}{}_{(n)} = n^a - 1$$

$$B = \underbrace{(n-1)(n-1)(n-1)...(n-1)}_{\text{"b" cifras}}{}_{(n)} = n^b - 1$$

$$C = \underbrace{(n-1)(n-1)(n-1)...(n-1)}_{\text{"c" cifras}}{}_{(n)} = n^c - 1$$

Se cumple:

$$\boxed{MCD(A; B; C) = n^{MCD(a;\, b;\, c)} - 1}$$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

POTENCIACIÓN

$$\boxed{\underbrace{k \times k \times \ldots \times k}_{\text{n veces}} = k^n = P}$$

Donde: k : Base ($k \in \mathbb{Z}^+$)

n : Exponente ($n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n > 1$)

P : Potencia perfecta de grado n

TEOREMA

Sea: $k = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$ (D.C.)

Entonces: $\boxed{k^n = a^{\alpha n} \times b^{\beta n} \times c^{\gamma n}}$ $\rightarrow \overset{\circ}{n}$

$\Rightarrow$ Es una potencia perfecta de grado n

CASOS PARTICULARES

POTENCIA PERFECTA DE GRADO 2 Ó CUADRADO PERFECTO (k^2)

Sea: $k = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$ (D.C.)

Entonces: $\boxed{k^2 = a^{2\alpha} \times b^{2\beta} \times c^{2\gamma} \text{ (D.C.)}}$ $\rightarrow \overset{\circ}{2}$

$\Rightarrow$ Es un cuadrado perfecto

NOTA

Un número es cuadrado perfecto si y sólo si tiene una cantidad impar de divisores.

POTENCIA PERFECTA DE GRADO 3 Ó CUBO PERFECTO (k^3)

Sea: $k = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$ (D.C.)

Entonces: $\boxed{k^3 = a^{3\alpha} \times b^{3\beta} \times c^{3\gamma} \text{ (D.C.)}}$ $\rightarrow \overset{\circ}{3}$

$\Rightarrow$ Es un cubo perfecto

CRITERIOS DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN DE CUADRADOS Y CUBOS PERFECTOS

SEGÚN SU ÚLTIMA CIFRA

k	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
k^2	...0	...1	...4	...9	...6	...5	...6	...9	...4	...1
k^3	...0	...1	...8	...7	...4	...5	...6	...3	...2	...9

Se concluye:

- Si un número termina en 2; 3; 7 u 8 no es k^2; en los demás casos tiene la posibilidad de ser un k^2.
- Un cubo perfecto puede terminar en cualquier cifra.

POR LA TERMINACIÓN EN CEROS

Para cuadrados perfectos

$$\overline{\underbrace{ab\ldots m}_{\substack{\text{Es un}\\\text{cuadrado}\\\text{perfecto}}}\underbrace{00\ldots00}_{\substack{\text{La cantidad}\\\text{de cifras}\\\text{ceros es } \overset{\circ}{2}}}} = k^2$$

Para cubos perfectos

$$\overline{\underbrace{np\ldots z}_{\substack{\text{Es un}\\\text{cubo}\\\text{perfecto}}}\underbrace{00\ldots00}_{\substack{\text{La cantidad}\\\text{de cifras}\\\text{ceros es } \overset{\circ}{3}}}} = k^3$$

POR LA TERMINACIÓN EN CIFRA 5

Para cuadrados perfectos

$$\overline{abcd5} = k^2 \rightarrow d = 2 \wedge \overline{abc} = n(n+1) \rightarrow c = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 6 \end{cases}$$

Para cubos perfectos

$$\boxed{\overline{abcd5} = k^3 \rightarrow d = 2 \vee d = 7}$$

POR CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Con respecto al módulo 4

$$k^2 = \begin{cases} \overset{\circ}{4} \\ \overset{\circ}{4} + 1 \end{cases} \quad \wedge \quad k^3 = \begin{cases} \overset{\circ}{4} \\ \overset{\circ}{4} + 1 \\ \overset{\circ}{4} - 1 \end{cases}$$

Con respecto al módulo 9

$$k^2 = \begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{9}+1 \\ \overset{\circ}{9}+4 \\ \overset{\circ}{9}+7 \end{cases} \quad \wedge \quad k^3 = \begin{cases} \overset{\circ}{9}-1 \\ \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{9}+1 \end{cases}$$

OBSERVACIÓN

* Si $k^2 = \overset{\circ}{p} \wedge p: \text{primo} \rightarrow k^2 = \overset{\circ}{p^2}$

* Si $k^3 = \overset{\circ}{p} \wedge p: \text{primo} \rightarrow k^3 = \overset{\circ}{p^3}$

RADICACIÓN

$$\sqrt[n]{k} = R \leftrightarrow k = R^n$$

Donde: k : Radicando ($k \in \mathbb{Z}^+$)

n : Índice ($n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n > 1$)

R : Raíz enésima

NOTA: Toda potencia perfecta de grado "n" posee raíz enésima exacta.

CASOS PARTICULARES

RAÍZ CUADRADA (EL ÍNDICE ES 2)

• **Exacta (resto es cero)**

$$\begin{array}{c|l} \sqrt{N} & k \\ \hline 0 & \end{array} \rightarrow N = k^2$$

• **Inexacta (resto diferente de cero)**

POR DEFECTO	POR EXCESO
$\begin{array}{c\|l} \sqrt{N} & k \\ \hline r_d & \end{array}$	$\begin{array}{c\|l} \sqrt{N} & k+1 \\ \hline r_e & \end{array}$
$N = k^2 + r_d$	$N = (k+1)^2 - r_e$

Se cumple:
• $r_d + r_e = 2k + 1$
• $0 < r < 2k + 1$; luego:
$r_{mínimo} = 1$
$r_{máximo} = 2k$

RAÍZ CÚBICA (EL ÍNDICE ES 3)

• **Exacta (resto es cero)**

$$\begin{array}{c|l} \sqrt[3]{N} & k \\ \hline 0 & \end{array} \rightarrow N = k^3$$

• **Inexacta (resto diferente de cero)**

POR DEFECTO	POR EXCESO
$\begin{array}{c\|l} \sqrt[3]{N} & k \\ \hline r_d & \end{array}$	$\begin{array}{c\|l} \sqrt[3]{N} & k+1 \\ \hline r_e & \end{array}$
$N = k^3 + r_d$	$N = (k+1)^3 - r_e$

Se cumple:
• $r_d + r_e = 3k(k+1) + 1$
• $0 < r < 3k(k+1) + 1$; luego:
$r_{mínimo} = 1$
$r_{máximo} = 3k(k+1) = \overset{\circ}{6}$

RAÍZ CUADRADA Y CÚBICA CON UNA CIERTA APROXIMACIÓN

Ejemplo 1:

$$\sqrt{5} = 2{,}23606797......$$

$$\underbrace{2{,}23 \quad \sqrt{5} \quad 2{,}24}_{0{,}01}$$

Si la diferencia de raíces es un centésimo y las raíces (por defecto y por exceso) son múltiplo de un centésimo, se dice que la aproximación es 0,01 o con un error menor que 0,01.

Ejemplo 2:

$$\sqrt[3]{35} = 3{,}27106631......$$

$$\underbrace{3{,}271 \quad \sqrt[3]{35} \quad 3{,}272}_{0{,}001}$$

Si la diferencia de raíces es 0,001 y las raíces (por defecto y por exceso) son múltiplo de un milésimo, se dice que la aproximación es 0,001 o con un error menor que 0,001.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right] / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

Donde: $\left[\frac{a}{b}\right]$ se llama clase $\frac{a}{b}$ o número racional $\left[\frac{a}{b}\right]$

NÚMEROS FRACCIONARIOS

Son aquellos números racionales que no son enteros.

FRACCIONES

Son aquellos números fraccionarios cuyos términos son positivos.

Si "f" es fracción: $f = \frac{n}{d}$ → numerador, → denominador

$\{n; d\} \subset \mathbb{Z}^+$

INTERPRETACIÓN

• Sea la fracción:

$\frac{5}{7}$ 5 → # de partes que se consideran
7 → # de partes en que se divide la unidad

$$\overbrace{\tfrac{1}{7}\ \tfrac{1}{7}\ \tfrac{1}{7}\ \tfrac{1}{7}\ \tfrac{1}{7}}^{5\ \text{partes}}\ \tfrac{1}{7}\ \tfrac{1}{7}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{7\ \text{partes}}$$

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

Sea la fracción: $\frac{a}{b}$

POR LA COMPARACIÓN DE SU VALOR CON RESPECTO A LA UNIDAD

FRACCIÓN PROPIA	FRACCIÓN IMPROPIA
$\frac{a}{b} < 1 \rightarrow a < b$	$\frac{a}{b} > 1 \rightarrow a > b$
Ejemplos: $\frac{5}{7}; \frac{3}{9}; \frac{39}{70}$	**Ejemplos:** $\frac{12}{8}; \frac{12}{9}; \frac{31}{17}$

POR SU DENOMINADOR

FRACCIÓN DECIMAL	FRACCIÓN ORDINARIA O COMÚN
$b = 10^k$ donde $k \in \mathbb{Z}^+$	$b \neq 10^k$ donde $k \in \mathbb{Z}^+$
Ejemplos: $\frac{99}{10}; \frac{37}{100}; \frac{32}{10000}$	**Ejemplos:** $\frac{17}{20}; \frac{18}{15}; \frac{36}{7}$

POR LA CANTIDAD DE DIVISORES COMUNES DE SUS TÉRMINOS

FRACCIÓN IRREDUCTIBLE	FRACCIÓN REDUCTIBLE
MCD(a; b) = 1	MCD(a; b) ≠ 1
→ a y b son PESI	→ a y b no son PESI
Ejemplos: $\frac{3}{5}; \frac{10}{17}; \frac{19}{8}$	**Ejemplos:** $\frac{15}{18}; \frac{4}{20}; \frac{91}{26}$

POR GRUPOS DE FRACCIONES

FRACCIONES HOMOGÉNEAS	FRACCIONES HETEROGÉNEAS
Todos los denominadores son iguales	Al menos un denominador es diferente
Ejemplos: $\frac{4}{5}; \frac{7}{5}; \frac{19}{5}$	**Ejemplos:** $\frac{16}{7}; \frac{19}{8}; \frac{8}{5}$

PROPIEDADES

1. Sea: $n \in \mathbb{Z}^+$

a) Si: $f_1 = \frac{a}{b} < 1 \wedge f_2 = \frac{a+n}{b+n} < 1 \rightarrow f_1 < f_2$

b) Si: $f_1 = \frac{a}{b} > 1 \wedge f_2 = \frac{a+n}{b+n} > 1 \rightarrow f_1 > f_2$

2. Sean las fracciones irreductibles: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

Si: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=k$; $(k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow b=d$

3. Sean las fracciones irreductibles:

$f_1=\frac{a}{m}$; $f_2=\frac{b}{n}$; $f_3=\frac{c}{p}$

$\Rightarrow \text{MCD}(f_1;f_2;f_3)=\dfrac{\text{MCD}(a;b;c)}{\text{MCM}(m;n;p)}$

$\Rightarrow \text{MCM}(f_1;f_2;f_3)=\dfrac{\text{MCM}(a;b;c)}{\text{MCD}(m;n;p)}$

FRACCIÓN CONTINUA SIMPLE (F.C.S.)

Una F.C.S. es una expresión de la forma:

$$f=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

Donde:
- $a_0\in\mathbb{Z}$
- $a_i\in\mathbb{Z}^+$; $\forall i\geq 1$

Notación: $f=[\underbrace{a_0;a_1;a_2;\ldots;a_n}_{\text{Términos de la F.C.S.}}]$

Observación:
- Una F.C.S. es finita si la cantidad de términos es limitada.
- Una F.C.S. es infinita si la cantidad de términos es limitada.

TEOREMA

Todo número racional se puede expresar como una F.C.S. finita.

Ejemplo: $\frac{19}{5}=[3;1;4]$

TEOREMA

Todo número irracional se puede expresar como una F.C.S. infinita.

Ejemplo: $\sqrt{2}=[1;\overline{2}]$

TEOREMA

Si $n\in\mathbb{Z}^+$ entonces:

$$\boxed{\sqrt{n^2+1}=[n;\overline{2n}]}$$

Ejemplo: $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}=[2;\overline{4}]$

TEOREMA

Si $n\in\mathbb{Z}^+ \wedge n>1$

$$\boxed{\sqrt{n^2-1}=[(n-1);\overline{1;2(n-1)}]}$$

Ejemplo: $\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1}=[1;\overline{1;2}]$

NÚMEROS AVALES

$$\boxed{f=\frac{A}{B}=\underbrace{x}_{\substack{\text{parte entera}\\\text{(característica)}}}\underbrace{,}_{\text{coma eneaval}}\underbrace{yzw\ldots}_{\substack{\text{parte eneaval}\\\text{(mantisa)}}}{}_{(n)}}$$

Cada cifra de la parte entera y aval ocupa un orden. Ejemplo: Sea $f=618{,}475$

$$\begin{array}{c}\overset{\longleftarrow\ \text{orden}}{3\,2\,1}\\ 6\,1\,8,4\,7\,5\\ \underset{\text{orden}\ \longrightarrow}{-1\,-2\,-3}\end{array}$$

NÚMEROS DECIMALES

CLASIFICACIÓN

1. NÚMERO DECIMAL EXACTO (N.D.E.)

Ejemplos:
- $\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{1}}=0{,}5$ $\hookrightarrow$ genera 1 cifra en la parte decimal
- $\frac{7}{25}=\frac{7}{5^{2}}=0{,}28$ $\hookrightarrow$ genera 2 cifras en la parte decimal

FRACCIÓN GENERATRIZ

$$\boxed{0{,}abc=\frac{\overline{abc}}{1000}}$$

$$\boxed{0{,}abc_{(n)}=\frac{\overline{abc}_{(n)}}{1000_{(n)}}}$$

2. NÚMERO DECIMAL INEXACTO (N.D.I.)

a) N.D.I. Periódico Puro Ejemplos:

- $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=0{,}333\ldots=0{,}\overset{\frown}{3}$ $\hookrightarrow$ genera 1 cifra en la parte periódica
- $\frac{7}{11}=\frac{63}{99}=0{,}6363\ldots=0{,}\overset{\frown}{63}$ $\hookrightarrow$ genera 2 cifras en la parte periódica

FRACCIÓN GENERATRIZ

$$\boxed{0{,}\overset{\frown}{abc}=\frac{\overline{abc}}{999}}$$

$$\boxed{0{,}\overset{\frown}{abc}_{(n)}=\frac{\overline{abc}_{(n)}}{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)}}}$$

b) N.D.I. Periódico Mixto Ejemplos:

- $\frac{7}{22}=\frac{7}{2^{1}\times 11}=0{,}3\overset{\frown}{18}$
  - $\hookrightarrow$ genera 2 cifras en la parte periódica
  - $\hookrightarrow$ genera 1 cifra en la parte decimal
- $\frac{19}{75}=\frac{19}{5^{2}\times 3}=0{,}25\overset{\frown}{3}$
  - $\hookrightarrow$ genera 1 cifra en la parte periódica
  - $\hookrightarrow$ genera 2 cifras en la parte decimal

FRACCIÓN GENERATRIZ

$$\boxed{0{,}abc\overset{\frown}{de}=\frac{\overline{abcde}-\overline{abc}}{99000}}$$

$$\boxed{0{,}abc\overset{\frown}{de}_{(n)}=\frac{\overline{abcde}_{(n)}-\overline{abc}_{(n)}}{\overline{(n-1)(n-1)000}_{(n)}}}$$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA DE LOS NÚMEROS AVALES

Sea: $0{,}abcd_{(n)}=\dfrac{\overline{abcd}_{(n)}}{10000_{(n)}}$

$$0{,}abcd_{(n)}=\frac{an^3+bn^2+cn^1+d}{n^4}$$

$$\overline{abcd}_{(n)}=\frac{a}{n^1}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}$$

ESTADÍSTICA

ORGANIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE DATOS

Ejemplo: A continuación se presentan los resultados obtenidos en un examen de 50 preguntas (1 punto por pregunta) de un grupo seleccionado al azar de 40 estudiantes, obteniendo los siguientes resultados:

13	21	9	25	12	35	7	22	5	18
24	12	21	9	25	8	16	17	23	11
7	27	15	17	14	26	12	19	10	29
20	12	19	10	20	12	23	8	22	7

Donde: $n=40$; n : Tamaño de la muestra o número de datos.

Al observar los datos se puede apreciar su variabilidad y desorden, lo cual hace difícil tomar decisiones acertadas. Es por ello que es necesario ordenar los datos en una TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.

Al ordenar ascendentemente los datos observados se tiene:

5	7	7	7	8	8	9	9	10	10
11	12	12	12	12	12	13	14	15	16
17	17	18	19	19	20	20	21	21	22
22	23	23	24	25	25	26	27	29	35

- La mínima nota obtenida es: 5
- La máxima nota obtenida es: 35

Para elaborar la Tabla de Distribución de Frecuencias debemos considerar los siguientes elementos para su presentación numérica:

- **ALCANCE (A):**

En el ejemplo: $A=[5;35]$

- **RANGO O RECORRIDO (R):**

En el ejemplo: $R=35-5=30$

- **INTERVALO DE CLASE (I_i):**

Para el ejemplo: [13; 19⟩ es un posible intervalo de clase donde se considera a aquellos estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual que 13 pero menor que 19:

13: es el límite inferior
19: es el límite superior

- **AMPLITUD O ANCHO DE CLASE (W_i):**

En el ejemplo: para el intervalo [13; 19⟩ su ancho de clase es: $19-13=6$

- **NÚMERO DE INTERVALOS DE CLASE (K):**

Regla de Sturges: $\boxed{K=1+3{,}3\log(n)}$

n: tamaño de la muestra

En el ejemplo: $K=1+3{,}3\log(40)$

$\rightarrow \quad K=6{,}28...$

El valor de k puede ser: 5, 6 ó 7.

Si deseamos intervalos de clase con un ancho de clase común:

$$W=\frac{\text{(Rango)}}{\text{(Número Intervalos Clase)}}=\frac{R}{K}$$

- **MARCA DE CLASE (X_i):**

En el ejemplo: [13; 19⟩ se observa que la marca de clase es:

$$\frac{13+19}{2}=16$$

Observe:

Consideremos: $K=6 \rightarrow W=\frac{30}{6}=5$

Formando los intervalos

I_i	X_i
[5; 10⟩	7,5
[10; 15⟩	12,5
[15; 20⟩	17,5
[20; 25⟩	22,5
[25; 30⟩	27,5
[30; 35]	32,5

Se considerará para la elaboración de la Tabla de Distribución de Frecuencias de los datos de nuestro ejemplo

- **FRECUENCIA ABSOLUTA SIMPLE (f_i):**

En el ejemplo:

I_i	X_i	TABULACIÓN O CONTEO	f_i
[5; 10⟩	7,5	卌 III	8
[10; 15⟩	12,5	卌 卌	10
[15; 20⟩	17,5	卌 II	7
[20; 25⟩	22,5	卌 IIII	9
[25; 30⟩	27,5	卌	5
[30; 35]	32,5	I	1
TOTAL			40

Donde:

- $f_1+f_2+f_3+...+f_K=n=\sum_{i=1}^{K} f_i$
- $f_i \geq 0$

- **FRECUENCIA RELATIVA (h_i):**

En el ejemplo:

I_i	X_i	f_i	h_i
[5; 10⟩	7,5	8	$\frac{8}{40}=0{,}20$
[10; 15⟩	12,5	10	$\frac{10}{40}=0{,}25$
[15; 20⟩	17,5	7	$\frac{7}{40}=0{,}175$
[20; 25⟩	22,5	9	$\frac{9}{40}=0{,}225$
[25; 30⟩	27,5	5	$\frac{5}{40}=0{,}125$
[30; 35]	32,5	1	$\frac{1}{40}=0{,}025$
TOTAL		40	1

Sabemos: $\boxed{h_i=\frac{f_i}{n}}$

La frecuencia absoluta es proporcional a la frecuencia relativa ya que n es constante

Donde:

- $h_1+h_2+h_3+...+h_K=1=\sum_{i=1}^{K} h_i$
- $0 \leq h_i \leq 1$

- **FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i):**

En el ejemplo:

I_i	X_i	f_i	F_i	h_i
[5; 10⟩	7,5	8	8	0,20
[10; 15⟩	12,5	10	18	0,25
[15; 20⟩	17,5	7	25	0,175
[20; 25⟩	22,5	9	34	0,225
[25; 30⟩	27,5	5	39	0,125
[30; 35]	32,5	1	40	0,025
TOTAL		40		1

Donde:

- $f_1=F_1$
- $F_K=f_1+f_2+f_3+...+f_K=\sum_{i=1}^{K} f_i=n$
- $F_i \geq 0$

- **FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i):**

En el ejemplo:

I_i	X_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[5; 10⟩	7,5	8	8	0,20	0,20
[10; 15⟩	12,5	10	18	0,25	0,45
[15; 20⟩	17,5	7	25	0,175	0,625
[20; 25⟩	22,5	9	34	0,225	0,850
[25; 30⟩	27,5	5	39	0,125	0,975
[30; 35]	32,5	1	40	0,025	1
TOTAL		40		1	

Sabemos: $\boxed{H_i=\frac{F_i}{n}}$

La frecuencia absoluta acumulada es proporcional a la frecuencia relativa acumulada ya que n es constante.

Donde:

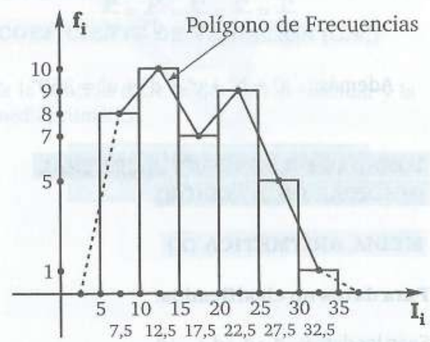
- $h_1=H_1$
- $H_K=h_1+h_2+h_3+...+h_K=\sum_{i=1}^{K} h_i=1$

TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

I_i	X_i	f_i	F_i	h_i	H_i	$100h_i\%$	$100H_i\%$	$X_i f_i$
[5; 10⟩	7,5	8	8	0,20	0,20	20%	20%	60
[10; 15⟩	12,5	10	18	0,25	0,45	25%	45%	125
[15; 20⟩	17,5	7	25	0,175	0,625	17,5%	62,5%	122,5
[20; 25⟩	22,5	9	34	0,225	0,850	22,5%	85%	202,5
[25; 30⟩	27,5	5	39	0,125	0,975	12,5%	97,5%	137,5
[30; 35]	32,5	1	40	0,025	1	2,5%	100%	32,5
TOTAL		40		1		100%		680

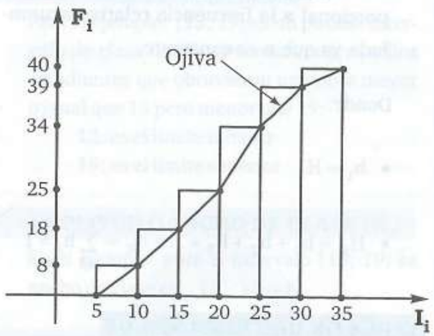
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

I. HISTOGRAMA

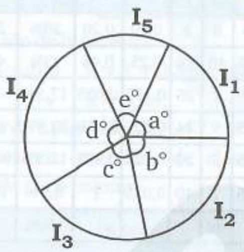


$$\left(\text{ÁREA POLIG. FREC.}\right)=\left(\text{ÁREA HISTOGRAMA}\right)$$

II DIAGRAMA ESCALONADO



III. GRÁFICA CIRCULAR



El ángulo central es proporcional al número de datos de su respectivo intervalo de clase.

$$\frac{f_1}{a°}=\frac{f_2}{b°}=\frac{f_3}{c°}=\frac{f_4}{d°}=\frac{f_5}{e°}$$

Además: $a°+b°+c°+d°+e°=360°$

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL (MEDIDAS DE POSICIÓN)

MEDIA ARITMÉTICA ($\overline{X}$)

Para datos no clasificados:

Sean los datos: $d_1; d_2; d_3; ...; d_n$

$$\overline{X}=\frac{d_1+d_2+d_3+...+d_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

Para datos clasificados:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i f_i}{n}=\sum_{i=1}^{k} X_i h_i$$

Donde:
K : # intervalos de clase
X_i : Marca de clase de la clase i
f_i : Frecuencia absoluta de clase i
h_i : Frecuencia relativa de la clase i

MEDIANA (M_e)

Para datos no clasificados:

Ejemplo: Si se tienen los datos: 5, 8, 7, 9, 6, 5, 4
Ordenando los datos: 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9
Como n = 7, se tiene: Me = 6

Para datos clasificados:

$$M_e=L_m+W_m\cdot\left[\frac{\frac{n}{2}-F_{m-1}}{f_m}\right]$$

Donde:
L_m : Límite inferior de la clase mediana
W_m : Amplitud de la clase mediana
n : Número total de datos.
F_{m-1} : Frecuencia absoluta acumulada de la clase que precede a la clase mediana.
f_m : Frecuencia absoluta de la clase mediana.

NOTA

La mediana se puede calcular utilizando las frecuencias absolutas o las frecuencias relativas.

MODA (M_o)

Para datos no clasificados:

Ejemplo: Si se tienen los datos: 5, 8, 7, 9, 6, 5, 4 con lo cual la moda es $M_o=5$, pues es el valor del dato que se repite con mayor frecuencia.

Para datos clasificados:

$$M_o=L_o+W_o\left[\frac{d_1}{d_1+d_2}\right]$$

Donde:
L_o : Límite inferior de clase modal
W_o : Amplitud de la clase modal
d_1 : Diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente.
d_2 : Diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente.

NOTA

TABLA DE DISTRIBUCIÓN SIMÉTRICA

Ejemplo:

I_i	X_i	f_i	h_i
[10; 14⟩	12	11	0,22
[14; 18⟩	16	8	0,16
[18; 22⟩	20	12	0,24
[22; 26⟩	24	8	0,16
[26; 40⟩	28	11	0,22
TOTAL		50	1

Se observa:

$$f_1=f_5 \wedge f_2=f_4 \rightarrow h_1=h_5 \wedge h_2=h_4$$

Luego:

$$\overline{X}=\frac{12\times11+16\times8+20\times12+24\times8+28\times11}{50}=20$$

$$M_e=18+4\left[\frac{25-19}{12}\right]=20$$

$$M_o=18+4\left[\frac{4}{4+4}\right]=20$$

$$\overline{X}=M_e=M_o=20$$

Siempre y cuando la distribución sea unimodal y la amplitud sea constante.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

VARIANZA (σ^2; S^2)

Para datos no clasificados:

$$\sigma^2=\frac{\sum(X-\overline{X})^2}{n}=\frac{\sum X^2}{n}-\overline{X}^2$$

Donde:
X : Dato
$\overline{X}$: Media aritmética
n : Total de datos

Para datos clasificados:

$$\sigma^2=\frac{\sum f_i(X_i-\overline{X})^2}{n}=\frac{\sum f_i X_i^2}{n}-\overline{X}^2$$

Donde:
f_i : Frecuencia absoluta de la clase i
X_i : Marca de clase de la clase i
$\overline{X}$: Media aritmética
n : Total de datos

DESVIACIÓN ESTÁNDAR (σ ó S)

Es la raíz cuadrada de la varianza.

COEFICIENTE DE VARIACIÓN (C.V.)

Es la relación entre la desviación estándar y la media aritmética.

$$C.V.=\frac{\sigma}{\overline{X}} \quad ó \quad C.V.=\frac{\sigma}{\overline{X}}\times100\%$$

ANÁLISIS COMBINATORIO

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si un evento "A" ocurre de "m" formas diferentes y un evento "B" ocurre de "n" formas distintas; entonces el evento "A ó B" (en sentido excluyente) ocurren de "m + n" formas diferentes.

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si un evento "A" ocurre de "m" formas diferentes y un evento "B" ocurre de "n" formas distintas; entonces el evento "A y B" (simultáneamente) ocurren de "m × n" maneras diferentes.

PERMUTACIÓN

Se agrupan e importa el orden de los elementos

PERMUTACIÓN LINEAL

$$\boxed{P_r^n = P_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Donde: $1 \leq r \leq n$

En el caso de r = n, se toman todos los elementos:

$$\boxed{P_n^n = P_{(n;\,n)} = P_{(n)} = n!}$$

PERMUTACIÓN CIRCULAR

$$\boxed{P_{c(n)} = (n-1)!}$$

PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

$$\boxed{P^n_{(n_1,\,n_2,\,n_3,\,\ldots,\,n_k)} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots \times n_k!}}$$

COMBINACIONES

Se agrupan sin importar el orden de los elemento

$$\boxed{C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \quad \text{Donde: } 0 \leq r \leq n$$

PROPIEDADES

1. $C_0^n = C_n^n = 1$

2. $C_x^n = C_y^n$; si $x + y = n$

3. $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n$

COMBINACIONES CON ELEMENTOS REPETIDOS

En general lo que se realiza es el cálculo del número de soluciones enteras no negativas de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = P$$

Donde se tendrá "P" puntos y "n – 1" signos de adición, luego:

$$\boxed{\left[\begin{array}{c}\text{N° de combinaciones} \\ \text{de "p" objetos,} \\ \text{distintos o no de "n"} \\ \text{objetos distintos}\end{array}\right] = CR_p^n = \frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!} = C_p^{n+p-1}}$$

Ejemplo:
¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecución:

$$a + b + c + d = 7?$$

Resolución:

$$CR_7^4 = C_7^{10} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

NOCIONES DE PROBABILIDADES

EXPERIMENTO DETERMINÍSTICO

Prueba o ensayo cuyos resultados bajo las mismas condiciones de experimentación es el mismo.
Ejemplo:

- Dejar caer un objeto de una altura de 1 m y hallar su velocidad de impacto.

EXPERIMENTO ALEATORIO (ε)

Prueba o ensayo cuyos resultados bajo las mismas condiciones de experimentación no pueden precisarse con exactitud.
Ejemplo:

ε : Al lanzar una moneda y al caer al piso puede mostrar "cara" o "sello"

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Del ejemplo anterior:

$$\Omega_1 = \{\text{cara, sello}\}$$

EVENTO O SUCESO

Subconjunto de un espacio muestral. Se denotan con las primeras letras minúsculas de nuestro alfabeto.

Del ejemplo anterior:
A_1 : El resultado muestra cara
A_1 = {cara}

OPERACIONES ENTRE SUCESOS

Como los sucesos son conjuntos cumplen todas las condiciones de los mismos:

Ejemplo: ε = lanzar un dado

Sea: Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

A : Se obtiene resultado par
→ A = {2; 4; 6}

B : Se obtenga puntaje menor que 4
→ B = {1; 2; 3}

i) Se obtenga puntaje par o menor que 4:
$A \cup B = \{2; 4; 6; 1; 3\}$

ii) Se obtenga puntaje par y menor que 4:
$A \cap B = \{2\}$

Algunas notaciones particulares:

Ω : Se le llama suceso seguro (siempre ocurre)
Φ : Se le llama suceso imposible (nunca ocurre)
{x}: Se le llama suceso elemental (sólo tiene un resultado)

SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

A y B son mutuamente excluyentes si y sólo si:

$$A \cap B = \varnothing$$

SUCESOS INDEPENDIENTES

A y B son independientes si la ocurrencia de A no afecta el hecho de que ocurra simultáneamente o sucesivamente B.

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

$$\boxed{P_{[A]} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad \vee \quad P_{[A]} = \frac{(\#\text{ casos favorables})}{(\#\text{ casos posibles})}}$$

PROPIEDADES DE PROBABILIDADES

1. Si A es un suceso definido en Ω, entonces:

$$\boxed{0 \leq P_{[A]} \leq 1}$$

Consecuencias: $\boxed{\begin{matrix} P_{[\Omega]} = 1 \\ P_{[\Phi]} = 0 \end{matrix}}$

2. Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes:

$$\boxed{\begin{matrix} P_{[A\cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]} \\ P_{[A\cap B]} = 0 \end{matrix}}$$

3. Si A y B son sucesos no mutuamente excluyentes definidos en un espacio muestral:

$$\boxed{P_{[A\cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]} - P_{[A\cap B]}}$$

4. Sea A un suceso definido en Ω entonces:

$$\boxed{P_{[A]} = 1 - P_{[A^C]}}$$

Donde A^C es el suceso complementario de A

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$\boxed{P_{[B/A]} = \frac{P_{[A\cap B]}}{P_{[A]}}} \quad ; P_{[A]} > 0$$

TEOREMA DE LA MULTIPLICACIÓN

Sean A y B dos sucesos incluidos en un espacio muestral:

$$\boxed{P_{[A\cap B]} = P_A \times P_{[B/A]}}$$

Si A y B son independientes.

$$\boxed{P_{[A\cap B]} = P_{[A]} \times P_{[B]}}$$

PROBABILIDAD TOTAL

$$\boxed{P_{[D]} = P_{[E_1]} \times P_{[D/E_1]} + P_{[E_2]} \times P_{[D/E_2]}}$$

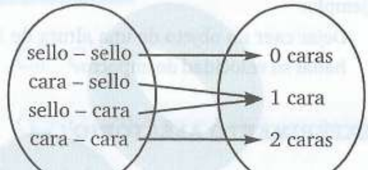
VARIABLE ALEATORIA

Ejemplo:

- Si se lanzan dos monedas y X es el número de veces que sale cara, entonces X es una variable aleatoria y toma al azar uno de los siguientes valores 0; 1 ó 2.

  Gráficamente:

Espacio muestral (Ω) *Variable aleatoria*



Se puede expresar en el siguiente cuadro

Variable aleatoria x_i	Frecuencia f_i	Función de probabilidad $f(x) = P(x)$
0 caras	1 vez	1/4
1 cara	2 veces	2/4
2 caras	1 vez	1/4

$n(\Omega) = 4$ $\Sigma f(x) = 1$

ESPERANZA MATEMÁTICA O VALOR ESPERADO [E(x)]

Sea "x" una variable aleatoria discreta que toma los valores: x_1; x_2; x_3; ...; x_n con función de probabilidad f.

Del ejemplo anterior; observando el cuadro se tendrá que:

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4}$$

$$\therefore \; E(x) = 1$$

$$\boxed{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + ... + x_n f(x_n)}$$