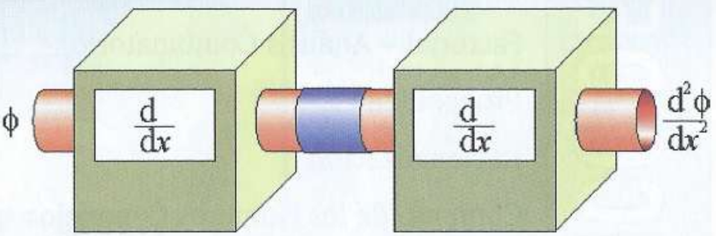
Resumen Teórico

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$



Álgebra

FONDO EDITORIAL RODO

ÍNDICE

RESUMEN TEÓRICO DE ÁLGEBRA

Potenciación y Radicación
El Polinomio
Productos Notables
División de Polinomios
Divisibilidad entre Polinomios
Factorización de Polinomios
Máximo Común Divisor - Mínimo Común Múltiplo
Factorial – Análisis Combinatorio
Probabilidades
Racionalización
Conjunto de los Números Complejos
Teoría Elemental de las Ecuaciones
Matrices y Determinantes
Sistemas de Ecuaciones
Desigualdades e Inecuaciones
Programación Lineal
Relaciones y Funciones
Logaritmación
Límites – Derivadas – Integrales
Nociones de Lógica
Sucesiones y Series
Progresiones

POTENCIACIÓN

$$b^n = p \begin{cases} b = \text{base} & ; b \in \mathbb{R} \\ n = \text{exponente} & ; n \in \mathbb{Z} \\ p = \text{potencia} & ; p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

DEFINICIONES

1. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$a^o = 1$$

2. $\forall a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$a^n = \begin{cases} a & ; n = 1 \\ \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,. \ldots .\, a}_{\text{"n" factores}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

3. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

TEOREMAS

1. $\forall a \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{Z}$

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$

2. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge m, n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. $a \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{Z}$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

4. $a \wedge b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$

$$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$$

5. $a \wedge b \in \mathbb{R}$ tales que $b \neq 0, n \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

OBSERVACIÓN

Los teoremas hasta aquí mostrados se extienden para cualquier exponente real.

PROPIEDAD

$$x^{m^{n^p}} = x^{m^a} = x^b = c$$

RADICACIÓN

$$\sqrt[n]{a} = b \begin{cases} \sqrt{\ } = \text{símbolo radical} & \\ n = \text{índice} & ; n \in \mathbb{Z}^+ \\ a = \text{radicando} & ; a \in \mathbb{R} \\ b = \text{raíz} & ; b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

DEFINICIONES

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

2. $\forall a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a & ; n = 1 \\ a^{1/n} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

3. Si: $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

TEOREMAS

Si: $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$ se verifica:

1. $$\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \,.\, b}$$

2. $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3. $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

PROPIEDADES

1. $$\sqrt[m]{x^a \sqrt[n]{x^b \sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[m.n.p]{x^{(an+b)p+c}}$$

2. $$\underbrace{\sqrt[n]{x \sqrt[n]{x \sqrt[n]{x \ldots \sqrt[n]{x}}}}}_{\text{"m" radicales}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n-1}}}$$

3. $$\sqrt[n]{x \sqrt[n]{x \sqrt[n]{x \ldots}}} = \sqrt[n-1]{x}$$

4. $$\sqrt[m]{x^a \div \sqrt[n]{x^b \div \sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[m.n.p]{x^{(an-b)p+c}}$$

5. $$\underbrace{\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \ldots \div \sqrt[n]{x}}}}}_{\text{"m" radicales}} = \begin{cases} \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m+1}{n+1}}} & ; \text{Si m es impar} \\ \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n+1}}} & ; \text{Si m es par} \end{cases}$$

6. $$\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \ldots}}} = \sqrt[n+1]{x}$$

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Teorema

$\forall a > 0 \wedge a \neq 1$

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y$$

Propiedad

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$a^x = b^x \Rightarrow x = 0$$

EL POLINOMIO

FORMA GENERAL DE UN POLINOMIO EN VARIABLE X

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Donde: $a_0; a_1; a_2; \ldots$ y a_n son coeficientes

$[P]^\circ$ = Grado de $P = n \Leftrightarrow a_0 \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$

a_0 = Coeficiente Principal (C. P.)

a_n = Término Independiente de x (T. I.)

PROPIEDADES

1) $\sum$Coef de $P(x) = P(1)$

2) T.I en $P(x) = P(0)$

GRADO DE POLINOMIOS

- $M(x; y) \equiv 5x^4y^6 + 2x^3y^5 + x^5y^4$

Grado Relativo a $x = GR(x) = 5$

Grado Relativo a $y = GR(y) = 6$

Grado Absoluto de $M = GA(M) = 4 + 6 = 10$

POLINOMIOS ESPECIALES

POLINOMIO HOMOGÉNEO:

- $P(x;y) \equiv x^3 + 5xy^2 - x^2y$ es homogéneo de grado 3 (grado de homogeneidad).

POLINOMIO ORDENADO:

- $P(x) \equiv x^7 + x^4 - x$ ordenado en forma decreciente.
- $F(x) \equiv x^4 + x^{10} - x^{32}$ ordenado en forma creciente.

POLINOMIO COMPLETO EN X:

- $P(x) \equiv x^2 + x + 4$

es completo de 2° grado, tiene 3 términos.

Propiedad:

$$N^\circ \text{ de términos} = GA + 1$$

POLINOMIO PRIMITIVO EN X:

- $F(x) \equiv 2x^2 - 3x^3 + 10$ está definido en $\mathbb{Z}$,

Además: MCD(2; -3; 10) = 1

POLINOMIO IDÉNTICAMENTE NULO:

- $P(x) \equiv 0$, no tiene grado definido

Propiedad:

$$P(x) \equiv ax^3 + bx + c = 0$$

Se cumple: $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$

OBSERVACIÓN

i. Polinomio constante de grado cero es cualquier número real distinto de cero.

ii. Polinomio mónico es literal de la forma $P(x)$ definida en $\mathbb{Z}$ y de coeficiente principal uno.

POLINOMIOS IDÉNTICOS

- $P(x) \equiv Q(x)$, donde:

$$P(x) \equiv ax^3 + bx + c$$

$$Q(x) \equiv mx^3 + nx + q$$

Se cumple: $a = m$; $b = n$; $c = q$

PRODUCTOS NOTABLES

BINOMIO AL CUADRADO

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

OBSERVACIÓN

$\forall m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$(a - b)^{2m} = (b - a)^{2m}$$

EQUIVALENCIA DE LEGENDRE

1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

2) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$$

TRINOMIO AL CUADRADO

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

BINOMIO AL CUBO

1) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

EQUIVALENCIA DE CAUCHY

1) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(ab)(a+b)$

2) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3(ab)(a-b)$

SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

1) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

2) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

TRINOMIO AL CUBO

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$

EQUIVALENCIA DE STEVEN

1) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

2) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$

EQUIVALENCIA DE ARGAN'D

$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$

EQUIVALENCIA DE LAGRANGE

1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$

2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2$

EQUIVALENCIA DE GAUSS

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$

EQUIVALENCIA ADICIONAL

$(a+b+c)(ab+ac+bc) = (a+b)(a+c)(b+c) + abc$

EQUIVALENCIA CONDICIONAL

Si los números a, b $\wedge$ c verifican: $a + b + c = 0$

Se cumple:

1) $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$

2) $(ab + ac + bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2$

3) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

4) $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$

5) $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc)$

IMPLICANCIAS NOTABLES

Siendo a, b y c números reales tenemos:

1) Si: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$
$\Rightarrow a = b = c$

2) Si: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
$\Rightarrow a + b + c = 0 \vee a = b = c$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- Identidad fundamental:

$$D(x) \equiv d(x)\,.\,Q(x) + R(x)$$

Donde: D(x) es el dividendo
d(x) es el divisor
Q(x) es el cociente
R(x) es el residuo o resto

PROPIEDADES REFERIDAS AL GRADO

Si: $[D]^\circ \geq [d]^\circ$ se cumple:

1) $[Q]^\circ = [D]^\circ - [d]^\circ$

2) $[R]^\circ < [d]^\circ$

3) $[R]^\circ_{\text{máx}} = [d]^\circ - 1$

MÉTODOS PARA EFECTUAR UNA DIVISIÓN ENTRE POLINOMIOS

MÉTODO DE HORNER:

$$\frac{a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

$D(x) \equiv a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1$

$d(x) \equiv a_2x^2 + b_2x + c_2$

Esquema:

a_2	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
$-b_2$		●	●		
$-c_2$			■	■	
				▲	▲
	Q_1	Q_2	Q_3	R_1	R_2

$\underbrace{Q_1 \; Q_2 \; Q_3}_{\text{Coef. del cociente}}$ $\underbrace{R_1 \; R_2}_{\text{Coef. del residuo}}$

REGLA GENERALIZADA DE RUFFINI

$$\frac{a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1}{ax + b}$$

$D(x) \equiv a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1$

$d(x) \equiv ax + b \rightarrow ax + b = 0$

$x = -b/a$

Esquema:

	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
$-\frac{b}{a}$					
	E_1	E_2	E_3	E_4	Resto

$\underbrace{E_1 \; E_2 \; E_3 \; E_4}_{\text{Coeficiente de la expresión algebraica}}$

Si: $a = 1$ E_1, E_2, E_3 y E_4 son los coeficientes del cociente

Si: $a \neq 1$ $\frac{E_1}{a}, \frac{E_2}{a}, \frac{E_3}{a}$ y $\frac{E_4}{a}$ serán los coeficientes del cociente

TEOREMA DEL RESTO

- Propuesto por Rene Descartes

$$\frac{P(x)}{ax+b} \rightarrow \text{Resto} = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

RESTOS ESPECIALES

- División inicial: $\frac{D}{d}$ → Q, R

- División final: $\frac{D\,.\,k}{d\,.\,k}$ → Q, $R' \equiv R\,.\,k$

DIVISIBILIDAD ENTRE POLINOMIOS

- Siendo $R(x) \equiv 0$, tenemos:

$$P(x) \equiv d(x) \,.\, Q(x)$$

TEOREMA

- Siendo $(x + a)$ y $(x + b)$ P. E. S. I.

$$P(x) \div (x+a) \rightarrow R(x) \equiv 0$$

$$P(x) \div (x+b) \rightarrow R(x) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \; P(x) \div [(x+a)(x+b)] \rightarrow R(x) \equiv 0$$

Lo recíproco también se cumple.

TEOREMA DEL FACTOR

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a) \text{ es un factor de } P(x)$$

$$\therefore P(x) \equiv (x-a) \,.\, Q(x)$$

COCIENTES NOTABLES

- Divisiones exactas, de la forma:

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y} \;;\; n \in \mathbb{N} / n \geq 2$$

ESTUDIO DE LOS COCIENTE NOTABLES

1) $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 2$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N} / n = \text{impar}$

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + y^{n-1}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N} / n = \text{par}$

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - y^{n-1}$$

PROPIEDADES

Si la división:

$$\frac{x^m \pm y^p}{x^a \pm y^b}$$

Origina un cociente notable, verifica:

$$n = \frac{m}{a} = \frac{p}{b}$$

FÓRMULA DEL TÉRMINO DE LUGAR k(t_k) EN UN COCIENTE NOTABLE

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y} \;;\; n \in \mathbb{N} / n \geq 2 \;;$$

$$t_k = (\text{signo})\, x^{n-k} y^{k-1}$$

Donde: t_k = término de lugar k

n = número de términos del CN

x = primer término del divisor

y = segundo término del divisor

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS EN Z

NÚMERO DE FACTORES PRIMOS Y NÚMERO DE FACTORES DE UN POLINOMIO

Sea P un polinomio totalmente factorizado:

$$P \equiv A^{\alpha} \,.\, B^{\beta} \,.\, C^{\theta}$$

1) Número de factores primos

N° de FP = 3 ¡Cantidad de bases!

2) Número de factores

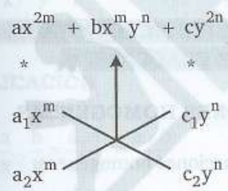
N° de fact = $(\alpha + 1) \,.\, (\beta + 1) \,.\, (\theta + 1)$

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

ASPA SIMPLE

$$P(x;y) \equiv ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}$$

Esquema:



Donde: $a_1c_2x^my^n + a_2c_1x^my^n = bx^my^n$

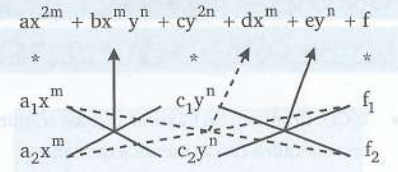
$$\therefore \; P(x;y) \equiv (a_1x^m + c_1y^n).(a_2x^m + c_2y^n)$$

ASPA DOBLE

$$P(x;y) \equiv \overset{*}{ax^{2m}} + bx^m y^n + \overset{*}{cy^{2n}} + dx^m + ey^n + \overset{*}{f}$$

* = términos fijos

Esquema:

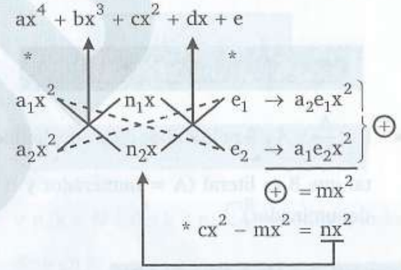


$$\therefore \; P(x;y) \equiv (a_1x^m + c_1y^n + f_1)(a_2x^m + c_2y^n + f_2)$$

ASPA DOBLE ESPECIAL

$$P(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Esquema:



$$\therefore \; P(x) \equiv (a_1x^2 + n_1x + e_1)(a_2x^2 + n_2x + e_2)$$

DIVISORES BINÓMICOS

Cero de un polinomio

"a" es un cero de $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$

Posibles ceros racionales (PCR)

$$PCR = \pm \left\{ \frac{\text{Divisores del término independiente de x en } P(x)}{\text{Divisores del coeficiente principal en } P(x)} \right\}$$

TEOREMA DEL FACTOR

Si x = a es un cero del polinomio P(x)

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a) \text{ es un factor de } P(x)$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)
MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

- MCD: Producto de factores primos comunes considerados con su menor exponente.
- MCM: Producto de factores primos comunes y no comunes considerados con su mayor exponente.

TEOREMA

- Siendo A y B polinomios, se cumple:

$$\boxed{A \,.\, B \equiv MCD(A, B) \,.\, MCM(A, B)}$$

FRACCIÓN ALGEBRAICA

- $F = \frac{A}{B}$; A y B polinomios de grado definido tal que B es literal (A = numerador y B = denominador)

SIGNO DE UNA FRACCIÓN

1) $$\boxed{F = \frac{+A}{+B} = \frac{-A}{-B} = +\frac{A}{B} = \frac{A}{B}}$$

2) $$\boxed{F = \frac{+A}{-B} = \frac{-A}{B} = -\frac{A}{B}}$$

CLASES DE FRACCIONES

FRACCIÓN PROPIA:

Fracciones propias:

$$\frac{x}{x^4-1},\ \frac{2}{x}\ \text{y}\ \frac{x^7+2x+1}{x^{10}-4x}$$

Fracciones impropias:

$$\frac{x^7+1}{x^2-1},\ \frac{x^8-x}{x^4}\ \text{y}\ \frac{x+1}{x-4}$$

FRACCIÓN IRREDUCTIBLE

- $\frac{x^2+7}{x-1}$ es irreductible
- $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ no es irreductible

FRACCIÓN DE VALOR CONSTANTE

- $\frac{2x+4}{x+2}$ es de valor constante igual a 2 para todo valor de x distinto de –2

Propiedad:

Si: $F(x;y) \equiv \dfrac{ax+bxy+cy}{a_1x+b_1xy+c_1y}$

es de valor constante se verifica lo siguiente:

$$\boxed{\text{valor constante} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}}$$

FRACCIÓN COMPLEJA

- $$\frac{x+1}{1-\frac{1}{x}},\quad \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}},\quad \frac{1}{2+\frac{x}{x-1}}$$

CARACTERÍSTICAS NOTABLES DE ALGUNAS FRACCIONES

FRACCIONES HOMOGÉNEAS

- Son fracciones homogéneas:

$$\frac{2x+7}{x^4-1}\ \text{y}\ \frac{x^3-2}{x^4-1}$$

- Son fracciones heterogéneas:

$$\frac{x+1}{x^3-2}\ \text{y}\ \frac{x^2+7}{x+1}$$

FRACCIONES EQUIVALENTES

- $$\frac{x^2-x-2}{x^2+x} <> \frac{x^2-2x}{x^2}\ ;\ \forall x \neq 0 \wedge x \neq -1$$

Propiedad:

$$\boxed{\frac{A}{B} <> \frac{C}{D} \rightarrow A\,.\,D \equiv B\,.\,C}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES

ADICIÓN Y/O SUSTRACCIÓN

- Para fracciones homogéneas:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a+b}{x}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = \frac{a-b}{x}$$

- Para fracciones heterogéneas:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{ay+bx}{xy}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = \frac{ay-bx}{xy}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = \frac{ayz+bxz-cxy}{xyz}$$

MULTIPLICACIÓN

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x} = \frac{a\,.\,b}{x\,.\,x} = \frac{a\,.\,b}{x^2}$$

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = \frac{a\,.\,b}{x\,.\,y}$$

DIVISIÓN

$$\frac{a}{x} \div \frac{b}{y} <> \frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}} = \frac{a\,.\,y}{b\,.\,x}$$

"Producto de extremos entre producto de medios"

FACTORIAL

- $\forall n, k \in \mathbb{N} : \underline{|n} = n! = \underline{n|}$ = Factorial de "n"

$$\boxed{\underline{|n} = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \vee n = 1 \\ 1.2.3. \ldots .\ n & ; n \geq 2 \end{cases}}$$

TEOREMA $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$

$$\boxed{\underline{|n} = n\,.\,\underline{|n-1}}$$

PROPIEDAD $\forall\ x \wedge y \in \mathbb{Z}^+$

$$\boxed{\underline{|x} = \underline{|y} \rightarrow x = y}$$

NÚMERO COMBINATORIO

- $\forall\ n, k \in \mathbb{N} \mid 0 \leq k \leq n$: C^n_k = Combinatorio de n en k

$$\boxed{C^n_k = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-k}\,.\,\underline{|k}}}$$

TEOREMAS

Básicos:

$$\boxed{C^n_0 = 1\ ;\ C^n_1 = n\ ;\ C^n_n = 1}$$

De Complemento:

$$\boxed{C^n_k = C^n_{n-k}}$$

De Degradación:

$$\boxed{C^n_k = \frac{n}{k} C^{n-1}_{k-1}}$$

ÁLGEBRA

$$C^n_k = \left(\frac{n-k+1}{k}\right) C^n_{k-1}$$

$$C^n_k = \left(\frac{n}{n-k}\right) C^{n-1}_k$$

De Reducción:

$$C^n_k + C^n_{k+1} = C^{n+1}_{k+1}$$

PROPIEDAD

$$C^n_k = C^n_r \rightarrow k = r \vee k + r = n$$

COEFICIENTE BINOMIAL

- $\forall\, m \in \mathbb{C} \wedge k \in \mathbb{N}$: $\binom{m}{k}$ = coeficiente binomial de m en k

$$\binom{m}{k} = \frac{m\,.\,(m-1)\,.\,(m-2)\,.\,....\,[m-(k-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,....\,(k-1)\,.\,k}$$

POTENCIA DE UN BINOMIO CON EXPONENTE NATURAL

DEFINICIONES

1) $(x+y)^0 = 1$
2) $(x+y)^1 = x + 1$

TEOREMAS

1) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
3) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$\vdots$

TEOREMA DEL BINOMIO $\forall\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2$

$$(x+y)^n = C^n_0 x^n + C^n_1 x^{n-1}y + C^n_2 x^{n-2}y^2 + ... + C^n_n y^n$$

1) El desarrollo admite "n + 1" términos
2) Fórmula del término de lugar (k + 1) en el desarrollo de $(x + y)^n$

$$t_{k+1} = C^n_k x^{n-k} y^k$$

Donde: t_{k+1} = término de lugar k + 1
n = exponente del binomio
x = primer término del binomio
y = segundo término del binomio

PROPIEDAD

Para el lugar que ocupa el término central (n = par)

$$LTC = \frac{n+2}{2}$$

TEOREMAS SOBRE SERIES $\forall\, n \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{R}$

1) $C^n_0 + C^n_1 + C^n_2 + C^n_3 + ... + C^n_n = 2^n$
2) $C^n_0 + C^n_2 + C^n_4 + C^n_6 + ... + \blacktriangle = 2^{n-1}$
3) $C^n_1 + C^n_3 + C^n_5 + C^n_7 + ... + \blacksquare = 2^{n-1}$
4) $\left[C^n_0\right]^2 + \left[C^n_1\right]^2 + \left[C^n_2\right]^2 + ... + \left[C^n_n\right]^2 = C^{2n}_n$
5) $1 + xC^n_1 + x^2C^n_2 + x^3C^n_3 + ... + x^nC^n_n = (1+x)^n$

PROPIEDADES ADICIONALES

- Para el desarrollo de $P(x;y) \equiv (ax^\alpha + by^\beta)^n$

1) $$\Sigma_{expon} = \frac{(\alpha+\beta)(n)(n+1)}{2}$$
2) $t_{k+1} > t_k$ "Para el término máximo"

POTENCIA DE UN BINOMIO CON EXPONENTE ENTERO NEGATIVO O FRACCIONARIO

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ...$$

Término que ocupa la posición k + 1 en el desarrollo de la potencia:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k}y^k \quad , \ k = 0, 1, 2, ...$$

TEORÍA COORDINATORIA

LAS PERMUTACIONES

- $\forall\, n \in \mathbb{N} / n \geq 2$

$$P_n = \underline{|n}$$

Interesa el orden, intervienen todos los elementos

1. PERMUTACIÓN CIRCULAR

$$P'_n = \underline{|n-1}$$

2. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha_1}\,.\,\underline{|\alpha_2}\,.....\,\underline{|\alpha_k}}$$

LAS VARIACIONES

- $\forall\, n, k \in \mathbb{N} / n \geq k$

$$V^n_k = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-k}}$$

Interesa el orden, intervienen parte de todos los elementos

LAS COMBINACIONES

- $\forall\, n, k \in \mathbb{N} / 0 \leq k \leq n$

$$C^n_k = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-k}\ \underline{|k}}$$

No interesa el orden, intervienen parte o todos los elementos

PROBABILIDADES

DEFINICIÓN CLÁSICA

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{Casos a favor de a}}{\text{Casos totales en } \Omega}$$

P(A) = Probabilidad de ocurrencia del evento A.

ÁLGEBRA DE EVENTOS

1) $A \cup B$: Ocurre A, ocurre B, o ambos (al menos uno).
2) $A \cap B$: A y B ocurren a la vez.
3) A': A no ocurre (evento contrario de A).

LEYES DE DEMORGAN

1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

OBSERVACIÓN

1) $\varnothing$ = Evento imposible.
2) Ω = Evento seguro.
3) Si A y B son mutuamente excluyentes: $A \cap B = \varnothing$

PROPIEDADES

1) $0 \leq P(A) \leq 1$; $\forall A \subset \Omega$.
2) $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$

TEOREMAS

1) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

2) $P(A') = 1 - P(A)$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

OBSERVACIÓN

$P(A/B)$ indica la probabilidad de que un evento A ocurra una vez que ocurra B.

PROBABILIDAD PARA LOS EVENTOS INDEPENDIENTES

$$P(A\cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

VARIABLE ALEATORIA

$f(x)$ es función de densidad si:

1) $f(x)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

3) $P(a\leq x\leq b) = \int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

F(x) es función de distribución si:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = P[X\leq x]$$

RACIONALIZACIÓN

FACTOR RACIONALIZANTE (FR)

(Exp. Irracional) . (FR) = Exp. Racional

RADICAL SIMPLE

Número irracional de la forma:

$$\sqrt[n]{A}\;;\; n\in\mathbb{Z}^+ \wedge A\in\mathbb{Q}$$

RADICAL DOBLE

Número irracional de la forma:

$$\sqrt[n]{A\pm\sqrt[m]{B}}\;;\; m\wedge n\in\mathbb{Z}^+,\; A\wedge B\in\mathbb{Q}$$

TRANSFORMACIÓN DEL RADICAL DOBLE DE LA FORMA $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ EN RADICALES SIMPLES

POR FÓRMULA:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Donde: $C = \sqrt{A^2 - B}$ ¡Número Racional!

POR REGLA PRÁCTICA:

$$\sqrt{M\pm 2\sqrt{N}} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y}\;;\; x > y$$

Donde: $x\,.\,y = N \wedge x + y = M$

CASOS DE RACIONALIZACIÓN

Para Denominador Monomio

$$\left[\sqrt[n]{A^m}\right][FR] = A;\; m,n\in\mathbb{Z}^+/n > m,$$ A es número primo

Donde: $FR = \sqrt[n]{A^{n-m}}$

Para Denominador Binomio Indice Dos

Expresión Irracional	FR	Expresión Racional
$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	$\sqrt{A}-\sqrt{B}$	$A-B$
$\sqrt{A}-\sqrt{B}$	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	$A-B$

$A, B\in\mathbb{Q}^+$

Para Denominador Binomio Indice Tres

Expresión Irracional	FR	Expresión Racional
$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A}^2-\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B}^2$	$A+B$
$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A}^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{B}^2$	$A-B$

$A, B\in\mathbb{Q}^+$

CASOS ESPECIALES

1) $\forall n\in\mathbb{Z}^+/\, n\geq 2$

$$(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})(FR) = A-B$$

$$FR = \sqrt[n]{A}^{n-1} + \sqrt[n]{A}^{n-2}\sqrt[n]{B} + \ldots + \sqrt[n]{B}^{n-1}$$

2) $n\in\mathbb{Z}^+$ / n es impar

$$(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})(FR) = A+B$$

$$FR = \sqrt[n]{A}^{n-1} - \sqrt[n]{A}^{n-2}\sqrt[n]{B} + \ldots + \sqrt[n]{B}^{n-1}$$

3) $n\in\mathbb{Z}^+$ / n es par

$$(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})(FR) = A-B$$

$$FR = \sqrt[n]{A}^{n-1} - \sqrt[n]{A}^{n-2}\sqrt[n]{B} + \ldots - \sqrt[n]{B}^{n-1}$$

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

$$\mathbb{C} = \{(x;y)\,/\,x, y\in\mathbb{R}\}$$

UNIDAD IMAGINARIA (i)

$$i = \sqrt{-1}\;\rightarrow\; i^2 = -1$$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$i^1 = i$	$i^2 = -1$
$i^3 = -i$	$i^4 = 1$

TEOREMAS

1) $\forall n\in\mathbb{Z}$

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$$

2) $\forall k\in\mathbb{Z}$

$$i^{4k} = 1$$

3) $\forall k\in\mathbb{Z}\wedge m\in\mathbb{Q}$

$$i^{4k+m} = i^m$$

PROPIEDADES

1) $\frac{1+i}{1-i} = i \;\wedge\; \frac{1-i}{1+i} = -i$

2) $(1+i)^2 = 2i \;\wedge\; (1-i)^2 = -2i$

ÁLGEBRA

NÚMERO COMPLEJO

$$z = (x; y) / x, y \in \mathbb{R}$$

Donde:

x = parte real del número complejo z = Re (z)

y = parte imaginaria del complejo z = Im (z)

CLASIFICACIÓN

1) $y = 0 \rightarrow z$ es real

2) $x = 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow z$ es imaginario puro

3) $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow z$ es imaginario

4) $x = 0 \wedge y = 0 \rightarrow z$ es nulo

FORMA RECTANGULAR, CARTESIANA O BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

$$z = (x; y) = x + yi / x, y \in \mathbb{R} ; i = \sqrt{-1}$$

NÚMEROS COMPLEJOS ESPECIALES

Dado el complejo $Z = x + yi / x \wedge y \in \mathbb{R}$, se define:

Conjugado de Z ($\bar{Z}$)

$$\bar{Z} = x - yi$$

Opuesto de Z (Zop = Z*)

$$Zop = Z^* = -Z = -x - yi$$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Dados los complejos: $Z_1 = x + yi \wedge Z_2 = a + bi$ tenemos:

I. ADICIÓN:

$$Z_1 \in \mathbb{C} \wedge Z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow (Z_1 + Z_2) \in \mathbb{C}$$

$$Z_1 + Z_2 = x + yi + a + bi$$

$$\therefore Z_1 + Z_2 = (x + a) + (y + b)i$$

II. MULTIPLICACIÓN:

$$Z_1 \in \mathbb{C} \wedge Z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow (Z_1 . Z_2) \in \mathbb{C}$$

$$Z_1 . Z_2 = (x + yi) . (a + bi)$$

$$\therefore Z_1 . Z_2 = (ax - by) + (bx + ay)i$$

Teoremas:

$\forall$ Z, Z1, Z2 $\in \mathbb{C}$

1) $\overline{(\bar{Z})} = Z ; \overline{(\overline{(\bar{Z})})} = Z$

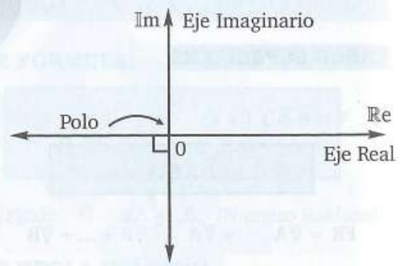
2) $\overline{(Z_1 + Z_2)} = \bar{Z_1} + \bar{Z_2}$

3) $\overline{(Z_1 - Z_2)} = \bar{Z_1} - \bar{Z_2}$

4) $\overline{(Z_1 . Z_2)} = \bar{Z_1} . \bar{Z_2}$

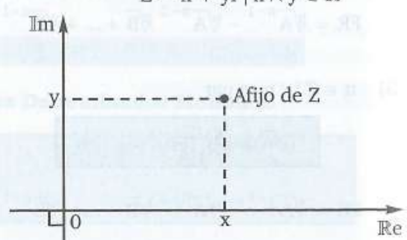
5) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z_1}}{\bar{Z_2}} ; Z_2 \neq 0$

PLANO COMPLEJO



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

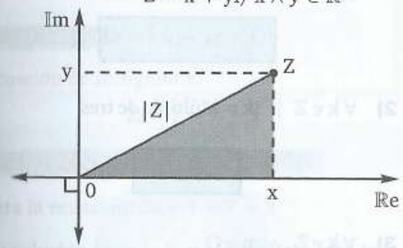
$$Z = x + yi \mid x \wedge y \in \mathbb{R}$$



ÁLGEBRA

MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO Z

$$Z = x + yi / x \wedge y \in \mathbb{R}$$



En el triángulo sombreada podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$|Z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

PROPIEDADES

$\forall$ Z, $Z_1 \wedge Z_2 \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

1) $|Z| \geq 0$

2) $|Z| = |\bar{Z}| = |Zop|$

3) $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2|$

4) $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} ; Z_2 \neq 0$

5) $|Z^n| = |Z|^n$

6) $|\sqrt[n]{Z}| = \sqrt[n]{|Z|}$

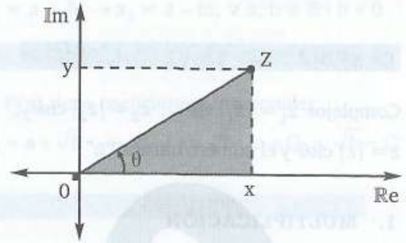
7) $|Z|^2 = Z . \bar{Z}$

8) $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

9) $|Z_1 + Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|$

10) $||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 - Z_2|$

ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO Z



$$Arg(Z) = 2k\pi + \theta ; k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Si: $k = 0 \rightarrow Arg(Z) = \theta$, recibe el nombre de argumento principal de Z

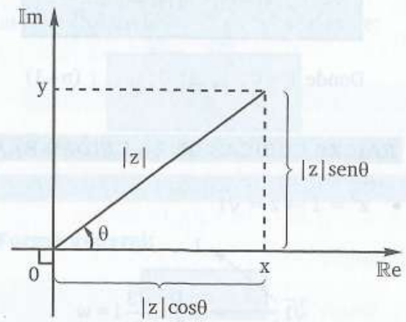
$$0 \leq \theta < 2\pi$$

Del triángulo sombreado:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \therefore \theta = \text{Arc tan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

- $z = (x; y) = x + yi \;/\; x; y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$



De la gráfica: $x = |z| \cos\theta ; y = |z| \text{sen}\theta$

El complejo: $z = |z| \cos\theta + |z| \text{sen}\theta\, i$

Forma polar: $\boxed{z = |z|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)}$

Forma abreviada: $z = |z|\ \text{cis}\,\theta$

OPERACIONES EN FORMA POLAR

Complejos $z_1 = |z_1|\ \text{cis}\theta_1$; $z_2 = |z_2|\ \text{cis}\theta_2$; $z = |z|\ \text{cis}\theta$ y el número natural "n"

1. MULTIPLICACIÓN

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\ \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)}$$

2. DIVISIÓN

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)\ ;\ z_2 \neq 0}$$

3. POTENCIA (Fórmula de De Moivre)

$$\boxed{z^n = (|z|\ \text{cis}\,\theta)^n = |z|^n \cdot \text{cis}(n\theta)}$$

4. RADICACIÓN

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|\ \text{cis}\,\theta} = \sqrt[n]{|z|}\ \text{cis}\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)}$$

Donde $k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\ ;\ (n-1)$

RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD REAL

- $z^3 = 1 \rightarrow z = \sqrt[3]{1}$

$$\sqrt[3]{1} \rightarrow \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = w \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = w^2 \end{cases}$$

PROPIEDADES

1) Las tres raíces cúbicas de la unidad suman cero:

$$\boxed{1 + w + w^2 = 0}$$

2) $\forall k \in \mathbb{Z}\ |\ 3k$ = Múltiplo de tres

$$\boxed{w^{3k} = 1}$$

3) $\forall k \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{w^{3k+m} = w^m}$$

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

El complejo $z = x + yi\ /\ x ; y \in \mathbb{R}$, su forma exponencial:

$$\boxed{z = |z|\ e^{\theta i}}$$

θ : argumento principal de z

e : Número de Napier; aproximadamente = 2,7182...

RELACIÓN ENTRE LA FORMA EXPONENCIAL Y LA FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$\boxed{e^{\theta i} = \cos\theta + i\ \text{sen}\theta}$$

$$\boxed{e^{-\theta i} = \cos\theta - i\ \text{sen}\theta}$$

TEOREMAS ADICIONALES

1) $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\text{cis}(\theta_1) = \text{cis}(\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

2) $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$e^{\theta_1 i} = e^{\theta_2 i} \quad \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

TEORÍA ELEMENTAL DE LAS ECUACIONES

ECUACIÓN

Ecuación de incógnita x:

$$2x - 1 = 7 + x$$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Para la ecuación: $2x - 1 = 7 + x$

Su solución es: $x = 8$, que para este caso también podrá ser llamada raíz

CONJUNTO SOLUCIÓN (CS)

$$(2x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-3) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\ ;\ x = -1\ \vee\ x = 3$$

$$\therefore\ CS = \left\{\frac{1}{2}\ ;\ -1\ ;\ 3\right\}$$

> **OBSERVACIÓN**
>
> Si dos ecuaciones tienen igual CS se les da el nombre de ecuaciones equivalentes.

ECUACIONES POLINOMIALES

$$\boxed{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0}$$

Donde: x = incógnita

$a_0, a_1, a_2, \ldots \wedge a_n \in \mathbb{C} / a_0 \neq 0$

n = grado de la ecuación $|\ n \in \mathbb{Z}^+$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio literal $P(x)$ ($[P]^o \geq 1$) tiene al menos una raíz, la cual generalmente es compleja.

Corolario:

Todo polinomio literal de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.

PARIDAD DE RAÍCES IMAGINARIAS

Si P(x) tiene coeficientes reales:

$x_1 = a + bi \rightarrow x_2 = a - bi$; $\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ |\ b \neq 0$

PARIDAD DE RAÍCES IRRACIONALES

Si P(x) tiene coeficientes irracionales:

$x_1 = a + \sqrt{b}\ \rightarrow\ x_2 = a - \sqrt{b}$; $a \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{b} = \mathbb{Q}'$

TEOREMA DE CARDANO - VIETTE

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_n = 0$$

Si sus raíces son $x_1; x_2; x_3; \ldots \wedge x_n$ se cumple:

1) **Suma de raíces:**

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

2) **Suma de productos binarios:**

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

3) **Suma de productos ternarios:**

$$x_1x_2x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$\vdots$

En general:

Si S_k representa la suma de los productos de las raíces tomadas de "k" en "k" se cumple:

$$\boxed{S_k = (-1)^k \cdot \frac{a_k}{a_0}}$$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO (LINEAL)

Forma general:

$$\boxed{ax + b = 0}$$

Donde: x = incógnita, asume un valor;

$a \wedge b \in \mathbb{R} / a \neq 0$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (CUADRÁTICA)

Forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde: x = incógnita, asume dos valores;

$a, b \wedge c \in \mathbb{R} / a \neq 0$

Fórmula de Carnot:

Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ estas se obtienen a partir de la relación:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2\ 4ac}}{2a} \ ; \ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DISCRIMINANTE (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1) $\Delta > 0$: Raíces reales y diferentes
2) $\Delta = 0$: Raíces reales e iguales
3) $\Delta < 0$: Raíces imaginarias y conjugadas

PROPIEDAD DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Si $x_1 \wedge x_2$: raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ; \ a \neq 0$$

Se cumple:

1) **Suma de raíces:** $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2) **Producto de raíces:** $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

NOTA

Diferencia de raíces, se recomienda utilizar la equivalencia de Legendre.

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4(x_1 \cdot x_2)$$

RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN x

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Siendo: S y P, suma y producto de raíces

TEOREMA DE LAS ECUACIONES EQUIVALENTES

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Se cumple: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

TEOREMA DE LA RAÍZ COMÚN

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

Se cumple:

$$(ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c) = (ac_1 - a_1c)^2$$

ECUACIÓN DE TERCER GRADO (CÚBICA)

Forma General:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ ....(1)$$

Donde: x = incógnita, asume tres valores;

$a, b, c \wedge d \in \mathbb{R} / a \neq 0$

Si en la forma general se sustituye x por $x - \frac{b}{3a}$:

$$x^3 + px + q = 0 \ ....(2)$$

Donde:

Discriminante se denota por D y se define:

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

1) D > 0: 1 raíz real y 2 imaginarias
2) D = 0: 3 raíces reales (2 raíces iguales)
3) D < 0: 3 raíces reales distintas

ECUACIÓN BICUADRADA

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Donde: x = incógnita, a, b, c $\in \mathbb{R} - \{0\}$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

1) $m^2 + n^2 = -\frac{b}{a}$ 2) $m^2 \cdot n^2 = \frac{c}{a}$

RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN BICUADRADA EN x

$$x^4 - (m^2 + n^2)x^2 + m^2n^2 = 0$$

ECUACIÓN BINOMIA

Forma General:

$$ax^n + b = 0$$

Donde: x = incógnita, asume "n" valores,

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$

ECUACIÓN TRINOMIA

Forma General:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

Donde: x = incógnita, asume "2n" valores;

$n \in \mathbb{N} / n \geq 2$; $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

PROPIEDAD Siendo P(x) un polinomio recíproco:

$$P(x) \equiv x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$$

MATRICES

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

FILA ⟷

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

C O L U M N A

FORMA GENERAL DE UNA MATRIZ DE "m" FILAS Y "n" COLUMNAS

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Donde a_{ij} es el elemento genérico ubicado en la fila i, columna j.

En forma abreviada:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ m = \overline{1; m}$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots\ n = \overline{1; n}$$

MATRICES ESPECIALES

1. MATRIZ FILA:

$$A = [1 \ \ 5 \ \ 7 \ \ 10]$$

2. MATRIZ COLUMNA:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. MATRIZ RECTANGULAR:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. MATRIZ CUADRADA:

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\1&7\end{bmatrix}$$

5. MATRIZ NULA:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

ADICIÓN:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\quad y\quad B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$$

Se define:

$$A+B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

MULTIPLICACIÓN

Multiplicación de un escalar por una matriz:

Sean: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\ \wedge\ k\in\mathbb{R}$

Se define:

$$k\,.\,A=k\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[k\,.\,a_{ij}\right]_{m\times n}$$

Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna

Sean: $A=\left[a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \cdots\ a_{1n}\right]\ \wedge\ B=\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\\\vdots\\b_{n1}\end{bmatrix}$

Se define:

$$A.B=\left[a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31}+\ldots+a_{1n}.b_{n1}\right]$$

Multiplicación de dos matrices:

Nº de columnas de A = Nº de filas de B

Luego: $A_{m\times \underbrace{p)\,.\,B_{(p}}_{\text{iguales}}\times n}=C_{m\times n}$

Teoremas:

1) $k\,.(A+B)=k\,.A+k\,.B$
2) $A+B=B+A$
3) $A\,.B\,.C=(A\,.B)\,.C=A\,.(B\,.C)$
4) $A\,.(B+C)=A\,.B+A\,.C$
5) $A\,.B=0$ no implica $A=0\vee B=0$
6) $A\,.B=A\,.C$ no implica $B=C$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\ \Rightarrow\ A^T=\left[a_{ji}\right]_{n\times m}$$

Propiedades:

Siendo A y B matrices y el escalar k

1) $(A+B)^T=A^T+B^T$
2) $(k.A)^T=k.A^T$
3) $(A^T)^T=A$
4) $(A.B)^T=B^T.A^T$

ESTUDIO DE LAS MATRICES CUADRADAS

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

DS DP

Donde: DP = Diagonal principal
DS = Diagonal secundaria

TRAZA DE A (Traz(A))

$$\text{Traz}(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}$$

Propiedades:

Siendo A y B matrices y el escalar k.

1) $\text{Traz}(A+B)=\text{Traz}(A)+\text{Traz}(B)$
2) $\text{Traz}(k.A)=k.\text{Traz}(A)$
3) $\text{Traz}(A.B)=\text{Traz}(B.A)$

POTENCIACIÓN:

$$A^n=\begin{cases}A & ;\ n=1\\ \underbrace{A.A.A\ldots\ldots A}_{\text{"n" veces}} & ;\ n\geq 2\end{cases}$$

MATRICES CUADRADAS ESPECIALES

1. MATRIZ DIAGONAL:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\ ;\quad B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

2. MATRIZ ESCALAR:

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

3. MATRIZ IDENTIDAD (I):

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

4. MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR:

$$A=\begin{bmatrix}5&4&2\\0&1&7\\0&0&4\end{bmatrix}$$

5. MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR:

$$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\2&-1&8\end{bmatrix}$$

CARACTERÍSTICAS NOTABLES DE ALGUNAS MATRICES CUADRADAS

1. MATRIZ SIMÉTRICA:

$$A^T=A$$

2. MATRIZ ANTISIMÉTRICA:

$$A^T=-A$$

3. MATRIZ IDEMPOTENTE:

$$A^2=A$$

4. MATRIZ INVOLUTIVA:

$$A^2=I\ ;\ \text{(matriz identidad)}$$

5. MATRIZ NILPOTENTE:

$$A^P=0\ ;\ \text{(matriz nula)}$$

Donde $P\in\mathbb{N}\,/\,P\geq 2$

DETERMINANTES

DETERMINANTE DE ORDEN UNO

$$A=[a]\ \rightarrow\ |A|=a$$

DETERMINANTE DE ORDEN DOS

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\ \rightarrow\ |A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$$

$$|A|=a\,.\,d-b\,.\,c$$

DETERMINANTE DE ORDEN TRES

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

Según la regla de Sarrus

$$\begin{array}{ccccccc} & & a & b & c & & \\ & & d & e & f & & \\ \oplus\left\{\begin{array}{l}c.e.g\leftarrow\\ f.h.a\leftarrow\\ i.b.d\leftarrow\end{array}\right. & & \begin{array}{c}g\\a\\d\end{array} & \begin{array}{c}h\\b\\e\end{array} & \begin{array}{c}i\\c\\f\end{array} & & \left.\begin{array}{l}\rightarrow a.e.i\\ \rightarrow d.h.c\\ \rightarrow g.b.f\end{array}\right\}\oplus \end{array}$$

$\oplus = N$ $\qquad$ $\oplus = M$

$$\boxed{|A| = M - N}$$

DETERMINANTE DE WANDERMONDE

1) DE ORDEN DOS

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

2) DE ORDEN TRES

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

3) DE ORDEN CUATRO

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{matrix}(d-c)(d-b)(d-a).\\ (c-b)(c-a)(b-a)\end{matrix}$$

MATRIZ INVERSA

- A = matriz cuadrada no singular ($|A| \neq 0$);

A^{-1} es la inversa de A si y sólo si:

$$A \, . \, A^{-1} = A^{-1} \, . \, A = I$$

Propiedades:

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar k:

1) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $(k.A)^{-1}) = k^{-1}.A^{-1}$

4) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

OBTENCIÓN DE MATRICES INVERSAS

1) DE ORDEN UNO

$$A = [a] \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right] \; ; \; a \neq 0$$

2) DE ORDEN DOS

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES

- Conjunto de dos o más ecuaciones que se verifican simultáneamente

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \text{ .... (1)} \\ x - y = 2 \text{ .... (2)} \end{cases}$$

Se verifica cuando: $x = 3 \wedge y = 1$

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

- Para el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \text{ ....(1)} \\ xy = 6 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

$$C.S = \{(3;2),(2;3),(-3;-2),(-2;-3)\}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS SEGÚN EL GRADO DE LAS ECUACIONES

SISTEMAS LINEALES:

$$\begin{cases} x + 5y = 4 \text{..............(1)} \\ 2x - y = 1 \text{..............(2)} \end{cases}$$

SISTEMAS NO LINEALES:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \text{............(1)} \\ x + y = 10 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

SISTEMAS LINEALES

FORMA GENERAL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde: $x_1; x_2; x_3; \ldots \wedge x_n$ son las Incógnitas.

Siendo el conjunto solución de la forma:

$$C.S = \{(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots; x_n)\}$$

SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \text{................(1)} \\ 2x + y + z = 0 \text{................(2)} \\ x - 3y - 2z = 0 \text{..............(3)} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL SEGÚN EL MÉTODO DE CRAMER

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos:

1) Determinante del sistema (Δ_s)

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Determinante de una incógnita (Δ_i)

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cada incógnita del sistema se obtendrá según la relación

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_s} \; ; \; \forall \, i = 1; n}$$

TEOREMA

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Si este admite soluciones a parte de la trivial, el determinante del sistema deberá ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

CASO PARTICULAR

Si el sistema:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = m \\ b_1x + b_2y = n \\ c_1x + c_2y = p \end{cases}$$

Es compatible, entonces:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & m \\ b_1 & b_2 & n \\ c_1 & c_2 & p \end{vmatrix} = 0$$

PROPIEDAD

- Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} ax + by = c \text{ .... (1)} \\ a_1x + b_1y = c_1 \text{ .... (2)} \end{cases}$$

1) Es compatible determinada (solución única)

$$\boxed{\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}}$$

2) Es compatible indeterminada (infinitas soluciones)

$$\boxed{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}}$$

3) Es incompatible (no tiene solución)

$$\boxed{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}}$$

DESIGUALDADES

Siendo a y b números reales:

$a > b$ a mayor que b

$a < b$ a menor que b

$a \geq b$ a mayor o igual que b

$a \leq b$ a menor o igual que b

AXIOMAS DE LA DESIGUALDAD

1) LEY DE TRICOTOMÍA:

$\forall\ a \wedge b \in \mathbb{R} : a > b \vee a < b \vee a = b$

2) LEY DE TRANSITIVIDAD:

$\forall\ a, b \wedge c \in \mathbb{R}$: si $a > b \wedge b > c \to a > c$

3) LEY ADITIVA:

$\forall\ a, b \wedge c \in \mathbb{R}$: si $a > b \to a + c > b + c$

4) LEY MULTIPLICATIVA:

$\forall\ a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^+$: si $a > b \to ac > bc$

EQUIVALENCIAS USUALES

Siendo a, b y c números reales:

1) $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

2) $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

TEOREMAS DE LA DESIGUALDAD

1) $\forall\ a \in \mathbb{R}$:

$a^2 \geq 0$

2) $a > 0 \leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$

$a < 0 \leftrightarrow \dfrac{1}{a} < 0$

3) $a, b, c \wedge d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{r} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

4) $a, b, c \wedge d \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{array}{r} a > b \\ c > d \\ \hline a \,.\, c > b \,.\, d \end{array}$$

5) $a, b \wedge c \in \mathbb{R}^+$ ó $a, b \wedge c \in \mathbb{R}^-$:

$a < b < c \to \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

6) $\forall\ a, b \wedge c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$:

$a < b < c \to a^{2n+1} < b^{2n+1} < c^{2n+1}$

7) $\forall\ a, b \wedge c \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$:

$a < b < c \to a^{2n} < b^{2n} < c^{2n}$

8) $\forall\ a, b \wedge c \in \mathbb{R}^-, n \in \mathbb{Z}^+$:

$a < b < c \to c^{2n} < b^{2n} < a^{2n}$

PROPIEDADES DE LA DESIGUALDAD

1) $a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^- \mid a > b \to ac < bc$

2) $a > 0 :\ a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

3) $a < 0 :\ a + \dfrac{1}{a} \leq -2$

4) $a < 0 \wedge c > 0 \mid$

$a < b < c \to 0 \leq b^2 < \text{Máx.}\{a^2; c^2\}$

PROPIEDAD ADICIONAL

Para números reales positivos tenemos:

MP = Media potencial

MA = Media aritmética

MG = Media geométrica

MH = Media armónica

$$\boxed{MP \geq MA \geq MG \geq MH}$$

INTERVALOS

- Conjunto cuyos elementos son números reales.

INTERVALOS ACOTADOS

INTERVALO ABIERTO:

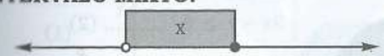
Donde: $a < x < b \Leftrightarrow x \in \langle a; b\rangle$

También: $x \in\ ]a; b[$

INTERVALO CERRADO:

Donde: $a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [a; b]$

INTERVALO MIXTO:



$a < x \leq b \Leftrightarrow x \in \langle a; b]$

$a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a; b\rangle$

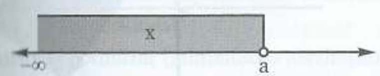
INTERVALOS NO ACOTADOS

INTERVALO ACOTADO INFERIORMENTE

Donde: $a < x < \infty \Leftrightarrow x > a \quad x \in \langle a; \infty\rangle$

Donde: $a \leq x < \infty \Leftrightarrow x \geq a \quad x \in [a; \infty\rangle$

INTERVALO ACOTADO SUPERIORMENTE



Donde: $-\infty < x < a \Leftrightarrow x < a \quad x \in \langle -\infty; a\rangle$

Donde: $-\infty < x \leq a \Leftrightarrow x \leq a \quad x \in \langle -\infty; a]$

INECUACIONES EN UNA VARIABLE

INECUACIONES RACIONALES

I. INECUACIÓN DE PRIMER GRADO (LINEAL):

$$\boxed{ax + b \gtrless 0}$$

$a \wedge b \in \mathbb{R} \mid a \neq 0$

II. INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (CUADRÁTICA):

$$\boxed{ax^2 + bx + c \gtrless 0}$$

$a, b \wedge c \in \mathbb{R} \mid a \neq 0$

III. INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR:

$$\boxed{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \gtrless 0}$$

$a_0; a_1; a_2; \ldots \wedge a_n \in \mathbb{R} \mid a_0 \neq 0$

$n \in \mathbb{N} / n \geq 3$

IV. INECUACIÓN FRACCIONARIA:

$$\boxed{\frac{F(x)}{H(x)} \gtrless 0 \ ;\ [H]^{\circ} \geq 1}$$

INECUACIONES IRRACIONALES

I. Forma: $\sqrt[2n]{A} > B;\ n \in \mathbb{Z}^+$

S_1: $A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A > B^{2n}$

S_2: $A \geq 0 \wedge B \geq 0$

$$\boxed{C.S = S_1 \cup S_2}$$

II. Forma: $\sqrt[2n]{A} < B\ ;\ n \in \mathbb{Z}^+$

$$\boxed{C.S = A \geq 0 \wedge B > 0 \wedge A < B^{2n}}$$

III. Forma: $\sqrt[2m]{A} \gtrless \sqrt[2n]{B}\ ;\ m \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

$$\boxed{C.S = A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A^n \gtrless B^m}$$

VALOR ABSOLUTO (V. A)

$$|x| = \begin{cases} x \;;\; x > 0 \\ 0 \;;\; x = 0 \\ -x \;;\; x < 0 \end{cases}$$

TEOREMAS

1) $|x| \geq 0 \;;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

2) $|x| = |-x|;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

3) $|x \,.\, y| = |x|.|y|;\; \forall\, x \wedge y \in \mathbb{R}$

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|};\; x \wedge y \in \mathbb{R} \,/\, y \neq 0$

5) $|x^2| = |x|^2 = x^2;\; \forall x \in \mathbb{R}$

6) $-|x| \leq x \leq |x|;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

7) $|x + y| \leq |x| + |y|;\; \forall\, x \wedge y \in \mathbb{R}$

PROPIEDADES

1) Si: $|x + y| = |x| + |y|$

Entonces: $xy \geq 0$

2) Si: $|x - y| = |x| + |y|$

Entonces: $xy \leq 0$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

$$\boxed{|x| = b;\; b > 0 \Leftrightarrow x = b \vee x = -b}$$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

1) $|x| > b \quad \Leftrightarrow \quad x > b \vee x < -b$

2) $|x| < b \quad \Leftrightarrow \quad b > 0 \wedge (-b < x < b)$

3) $|x| \gtrless |y| \Leftrightarrow (x + y)\,(x - y) \gtrless 0$

PROGRAMACIÓN LINEAL

SOLUCIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES

Dado un sistema de inecuaciones lineales conformado por dos o más inecuaciones, la solución gráfica de dicho sistema es la región que se determinar al interceptar todos los semiplanos originados por las inecuaciones que conforman el sistema.

Ejemplo:

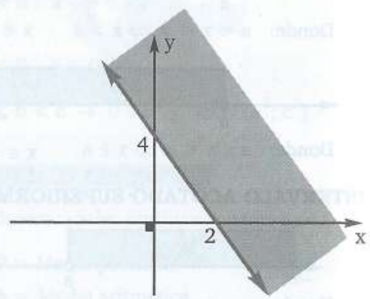
Resolver:

$$\begin{cases} 2x + y \;\geq\; 4 \;\text{.........}\; (1) \\ 3x - y \;\geq\; 6 \;\text{.........}\; (2) \end{cases}$$

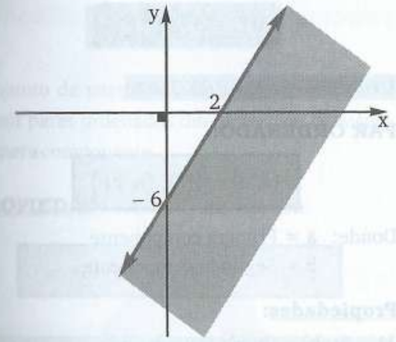
Resolución:

Inicialmente graficamos los semiplanos que corresponden a cada inecuación del sistema.

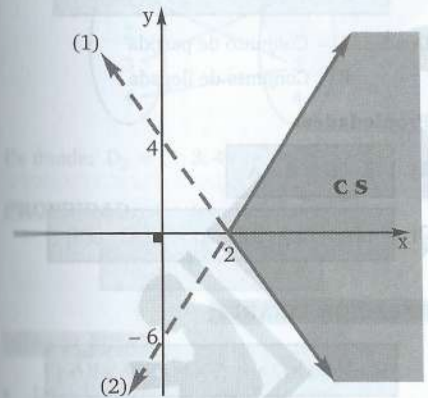
(1): $2x + y \geq 4 \;\Leftrightarrow\; y \geq 4 - 2x$; semiplano ubicado por encima de $y = 4 - 2x$. Incluyendo a esta recta.



(2): $3x - y \geq 6 \;\Leftrightarrow\; y \leq 3x - 6$; es semiplano ubicado por debajo de la recta $y = 3x - 6$, incluyendo a ésta.



Finalmente el conjunto solución del sistema viene dado por las intersección de los semiplanos hallados, veamos:



PROGRAMACIÓN LINEAL

Es un modelo matemático mediante el cual se resuelve un problema determinado, formulado por ecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal.

Consiste es optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, que llamaremos la función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

FUNCIÓN OBJETIVO

Es una función lineal en dos variables que debemos maximizar o minimizar, la función objetivo presenta la siguiente forma:

$$\boxed{F(x;\, y) = ax + by + c}$$

Donde: a, b y c son constantes; x, y se llaman variables de decisión

CONJUNTO DE RESTRICCIONES

Es el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas que expresan un conjunto de limitaciones que presenta el problema propuesto. Aquí también se consideran las variables de decisión como variables no negativas, es decir:

$x \geq 0 \;\wedge\; y \geq 0$

SOLUCIONES FACTIBLES

Son cada una de las soluciones que verifican al conjunto de restricciones, cada solución factible se representa por un punto en el plano cartesiano.

REGIÓN FACTIBLE

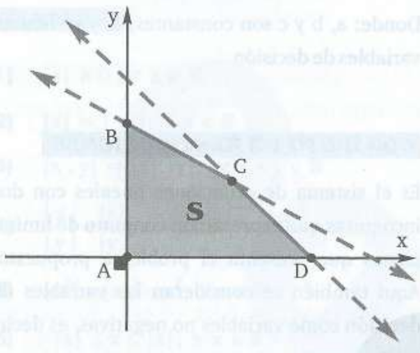
Se llama así al conjunto convexo formado por los puntos que representan a las soluciones factibles, es una región polinomial. La región factible puede, o no, ser acotada, la primera incluye los puntos de su frontera y la otra no.

OBSERVACIÓN

Sólo las regiones factibles acotadas presentan siempre solución, en las otras puede o no existir solución.

SOLUCIÓN ÓPTIMA

Es el punto cuyas coordenadas hacen de la función objetivo un valor máximo o mínimo. La solución óptima, en caso de existir, se alcanza en un vértice de la región factible.



S = Región Factible

A, B, C y D son posibles puntos de optimización.

MÉTODO ANALÍTICO O MÉTODO DE LOS VÉRTICES

DESCRIPCIÓN

Se determina la región factible calculando las coordenadas de todos sus vértices, luego cada punto que corresponde a un vértice se reemplaza en la función objetivo esperando obtener con alguno de ellos un valor máximo o mínimo según corresponda a la optimización.

TEOREMA

Si la función objetivo asume el mismo valor óptimo en dos vértices de la región factible, también asume el mismo valor en los puntos del segmento limitado por dichos vértices.

RELACIONES

DEFINICIONES PREVIAS

PAR ORDENADO:

$$\boxed{(a;b)=\{\{a\},\{a,b\}\}}$$

Donde: a = Primera componente
b = Segunda componente

Propiedades:

1) $(a;b)\neq(b;a);\ \forall\ a\neq b$

2) $(a;b)=(c;d)\rightarrow a=c\wedge b=d$

PRODUCTO CARTESIANO:

$$\boxed{A\times B=\{(a;b)/a\in A\wedge b\in B\}}$$

Donde: A = Conjunto de partida
B = Conjunto de llegada

Propiedades:

1) $\boxed{A\times B\neq B\times A}$

2) $\boxed{n(A\times B)=n(B\times A)=n(A)\,.\,n(B)}$

RELACIÓN BINARIA

$$\boxed{R=\{(a;b)/a\in A\wedge b\in B\wedge aRb\}}$$

Donde: a R b indica la relación que existe entre las componentes a y b

CLASES DE RELACIÓN: (R: A → A)

1) Reflexiva: Si: $\forall\ a\in A\ ,\ (a;a)\in R$

2) Simétrica: Si: $(a;b)\in R\rightarrow(b;a)\in R$

3) Transitiva:
Si: $(a;b)\in R\wedge(b;c)\in R\rightarrow(a;c)\in R$

4) De Equivalencia:
Siempre y cuando sea a la vez reflexiva, simétrica y transitiva.

FUNCIONES

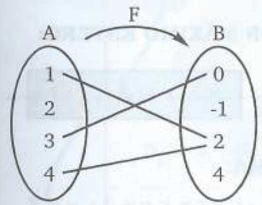
Conjunto de pares ordenados donde no puede existir pares ordenados diferentes con la misma primera componente.

PROPIEDAD: Siendo F una función:

$$\boxed{(x;y)\in F\wedge(x;z)\in F\rightarrow y=z}$$

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN F

Diagrama sagital (F: A → B)



De donde: $D_F=\{1;3;4\}\ \wedge\ R_F=\{2;0\}$

PROPIEDAD: F : A → B:

$$\boxed{D_F\subset A\ \wedge\ R_F\subset B}$$

APLICACIÓN

- Dada la función F: A → B, tenemos:

$$\boxed{F\text{ es aplicación}\leftrightarrow D_F=A}$$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

DEFINICIÓN

$$F:A\rightarrow B;\ A\subset\mathbb{R}\wedge B\subset\mathbb{R}$$

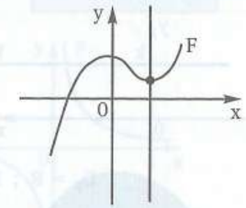
Es decir:

$$\boxed{F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x\in D_F\ \wedge y=F(x)\}}$$

TEOREMA

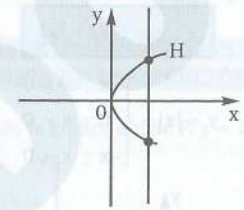
Toda recta vertical trazada a la gráfica de una función, la corta en un solo punto

Fig (1):



F corresponde a la gráfica de una función.

Fig (2):



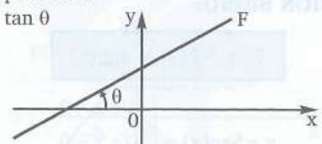
H no corresponde a la gráfica de una función.

FUNCIONES ESPECIALES

FUNCIÓN LINEAL:

$$\boxed{F:y=F(x)=mx+b}$$

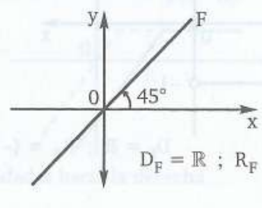
m = pendiente
m = tan θ



$D_F=\mathbb{R}\ ;\ \ R_F=\mathbb{R}$

FUNCIÓN IDENTIDAD:

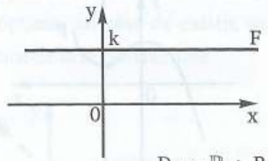
$$\boxed{F:y=F(x)=x}$$



$D_F=\mathbb{R}\ ;\ R_F=\mathbb{R}$

FUNCIÓN CONSTANTE:

$F: y = F(x) = k \; ; \; k \in \mathbb{R}$

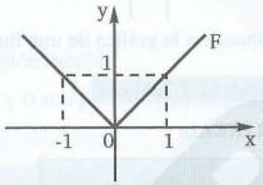


$D_F = \mathbb{R} \; ; \; R_F = \{k\}$

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO:

$F: y = F(x) = |x|$

$$y = |x| = \begin{cases} x \; ; \; x > 0 \\ 0 \; ; \; x = 0 \\ -x \; ; \; x < 0 \end{cases}$$

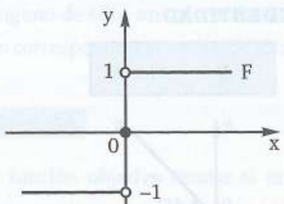


$D_F = \mathbb{R} \; ; \; R_F = [0; \infty\rangle$

FUNCIÓN SIGNO:

$F: y = F(x) = \text{Sgn}(x)$

$$y = \text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1 \; ; \; x < 0 \\ 0 \; ; \; x = 0 \\ 1 \; ; \; x > 0 \end{cases}$$

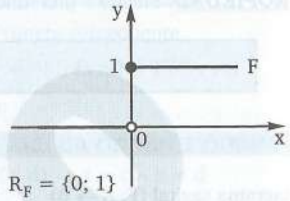


$D_F = \mathbb{R} \; ; \; R_F = \{-1; 0; 1\}$

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO:

$F: y = F(x) = U(x)$

$$y = U(x) = \begin{cases} 0 \; ; \; x < 0 \\ 1 \; ; \; x \geq 0 \end{cases}$$



$D_F = \mathbb{R} \; ; \; R_F = \{0; 1\}$

FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO:

$F: y = F(x) = [\![x]\!]$

TEOREMA:

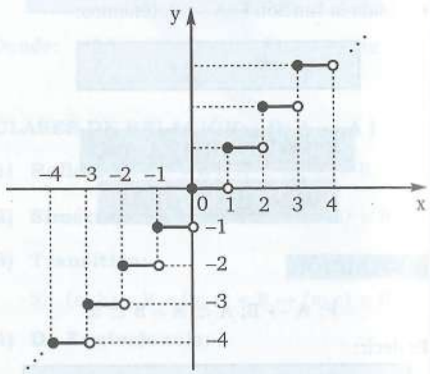
$[\![x]\!] = y \leftrightarrow y \leq x < y + 1 \; ; \; y \in \mathbb{Z}$

Así: $y = [\![x]\!] = 0$ para $0 \leq x < 1$

$y = [\![x]\!] = 1$ para $1 \leq x < 2$

$y = [\![x]\!] = 2$ para $2 \leq x < 3$

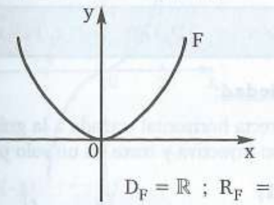
$\vdots$



$D_F = \mathbb{R} \; ; \; R_F = \mathbb{R}$

FUNCIÓN CUADRÁTICA SIMPLE:

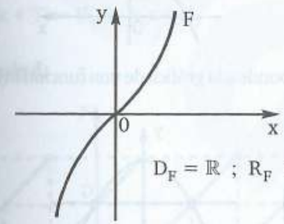
$F: y = F(x) = x^2$



$D_F = \mathbb{R} \; ; \; R_F = [0; \infty\rangle$

FUNCIÓN CÚBICA SIMPLE:

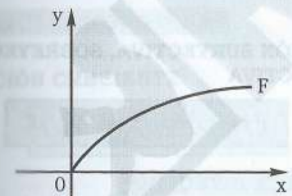
$F: y = F(x) = x^3$



$D_F = \mathbb{R} \; ; \; R_F = \mathbb{R}$

FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA:

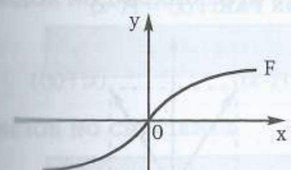
$F: y = F(x) = \sqrt{x}$



$D_F = [0; \infty\rangle \; ; \; R_F = [0; \infty\rangle$

FUNCIÓN RAÍZ CÚBICA:

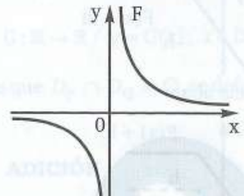
$F: y = F(x) = \sqrt[3]{x}$



$D_F = \mathbb{R} \; ; \; R_F = \mathbb{R}$

FUNCIÓN INVERSO MULTIPLICATIVO:

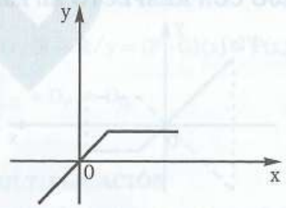
$F: y = F(x) = \dfrac{1}{x}$



$D_F = \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; R_F = \mathbb{R} - \{0\}$

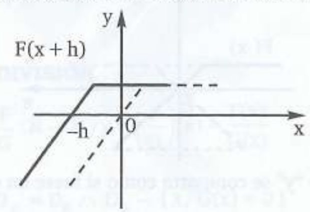
DESPLAZAMIENTOS Y REFLEJOS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Conociendo la gráfica donde $F: y = F(x)$

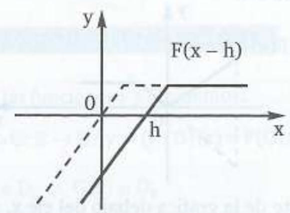


Y considerando un número positivo h, tenemos:

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL:

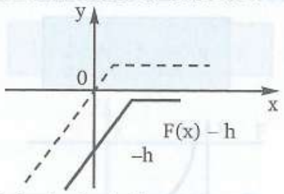


"h" unidades hacia la izquierda

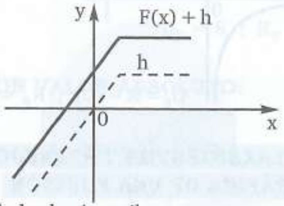


"h" unidades hacia la derecha

DESPLAZAMIENTO VERTICAL:

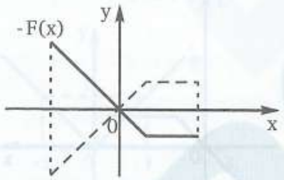


"h" unidades hacia abajo



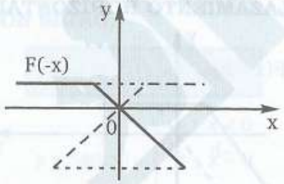
"h" unidades hacia arriba

REFLEJO CON RESPECTO AL EJE "x":



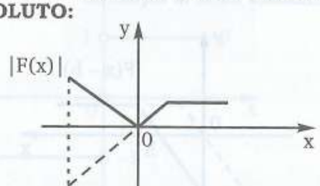
"El eje "x" se comporta como si fuese un espejo"

REFLEJO CON RESPECTO AL EJE "y":



"El eje "y" se comporta como si fuese un espejo"

REFLEJO PRODUCIDO POR VALOR ABSOLUTO:



"La parte de la gráfica debajo del eje x, se refleja por encima del mismo"

CLASES DE FUNCIONES

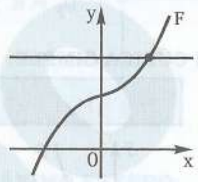
FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE

$$\forall\, x_1, x_2 \in D_F \mid F(x_1) = F(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Propiedad:

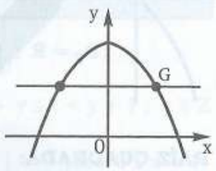
Toda recta horizontal trazada a la gráfica de una función inyectiva y corta en un solo punto.

Fig (1)



F corresponde a la gráfica de una función inyectiva.

Fig (2)



G no corresponde a la gráfica de una función inyectiva.

FUNCIÓN SURYECTIVA, SOBREYECTIVA EPIYECTIVA

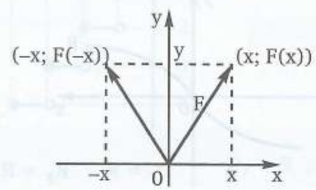
$$F \text{ es Suryectiva} \leftrightarrow R_F = B$$

FUNCIÓN BIYECTIVA

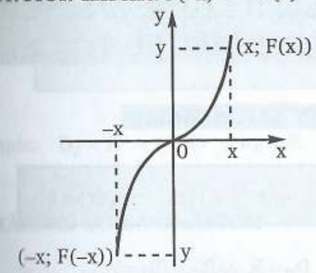
F es biyectiva si y sólo si es inyectiva y suryectiva a la vez

FUNCIONES NOTABLES

FUNCIÓN PAR: $F(x) = F(-x)$



FUNCIÓN IMPAR: $F(-x) = -F(x)$

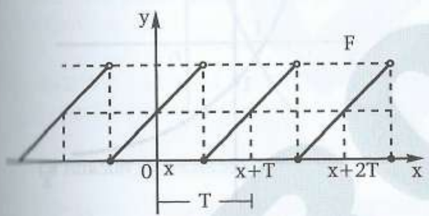


FUNCIÓN PERIÓDICA (T = período)

I) $x \in D_F \rightarrow (x+T) \in D_F$

II) $F(x+T) = F(x);\ \forall x \in D_F$

Propiedad:



FUNCIONES MONÓTONAS

FUNCIÓN CRECIENTE

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

FUNCIÓN DECRECIENTE

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) > F(x_2)$$

FUNCIÓN NO DECRECIENTE

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

FUNCIÓN NO CRECIENTE

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \geq F(x_2)$$

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Dadas las funciones F y G, donde:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, y = F(x);\ x \in D_F$$

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, y = G(x);\ x \in D_F$$

Tales que $D_F \cap D_G \neq \varnothing$, se define:

1. ADICIÓN

$$F + G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F+G)(x) = F(x) + G(x)$$

$$D_{F+G} = D_F \cap D_G$$

2. SUSTRACCIÓN

$$F - G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F-G)(x) = F(x) - G(x)$$

$$D_{F-G} = D_F \cap D_G$$

3. MULTIPLICACIÓN

$$F.G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F.G)(x) = F(x).G(x)$$

$$D_{F.G} = D_F \cap D_G$$

4. DIVISIÓN

$$\frac{F}{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = \left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

$$D_{\frac{F}{G}} = D_F \cap D_G - \{x / G(x) = 0\}$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas las funciones F y G tenemos:

$$F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = (F \circ G)(x) = F(G(x))$$

$$x \in D_G \wedge G(x) \in D_F$$

PROPIEDADES

Para las funciones F, G y H:

I) $\exists\ F \circ G \leftrightarrow R_G \cap D_F \neq \varnothing$

II) En general $F \circ G \neq G \circ F$

III) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$

IV) $(F + G) \circ H = (F \circ H) + (G \circ H)$

V) $(F \,.\, G) \circ H = (F \circ H) \,.\, (G \circ H)$

VI) Siendo I la función identidad $F \circ I = F$; $I \circ F = F$

FUNCIÓN INVERSA

Dada la función inyectiva F, existe $F^{-1} = F^*$ llamada función inversa de F tal que:

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = I$$

PROPIEDADES

Siendo F y G funciones inyectivas y la función identidad I, tenemos:

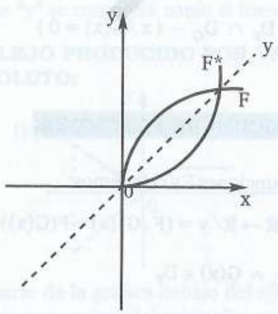
I) $D_{F^*} = R_F$; $R_{F^*} = D_F$

II) $(F^*)^* = F$

III) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

TEOREMA

Siendo F una función inyectiva, las gráficas de F y F* son simétricas con respecto a la recta identidad y = x



FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

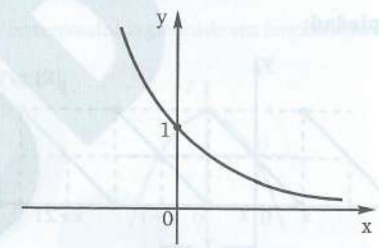
FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, y = F(x) = \exp_b(x) = b^x$$

Donde: $D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \langle 0; \infty \rangle$

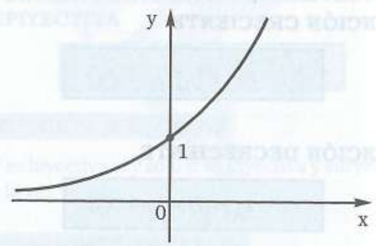
ANÁLISIS DE LA GRÁFICA:

1) $F : y = F(x) = b^x$; $0 < b < 1$



La función es decreciente

2) $F : y = F(x) = b^x$; $b > 1$



La función es creciente

OBSERVACIÓN

La función exponencial es monótona e inyectiva, por lo último se afirma que dicha función admite inversa.

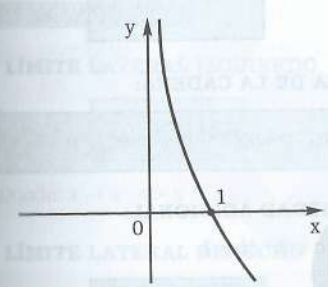
FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, y = F(x) = \mathrm{Log}_b x$$

Donde: $D_F = \mathbb{R}^+ = \langle 0; \infty \rangle$; $R_F = \mathbb{R}$

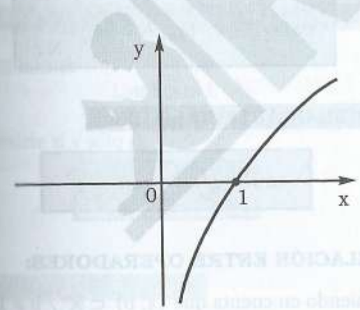
ANÁLISIS DE LA GRÁFICA:

1) $F : y = F(x) = \log_b x$; $0 < b < 1$



La función es decreciente

2) $F : y = F(x) = \log_b x$; $b > 1$



La función es creciente

OBSERVACIÓN

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial y viceversa.

LOGARITMACIÓN EN ℝ

LOGARITMO (log)

$$\boxed{\log_b N = \alpha} \quad .... (1)$$

Donde: log = operador de la logaritmación

N = número propuesto / N > 0

b = base del logaritmo / b > 0; b ≠ 1

α = logaritmo / $\alpha \in \mathbb{R}$

POR DEFINICIÓN:

$$\log_b N = \alpha \ \Leftrightarrow\ \boxed{b^\alpha = N} \quad .... (2)$$

TEOREMA: Reemplazando (1) en (2):

$$\boxed{b^{\log_b N} = N}$$

PROPIEDADES GENERALES:

1) $\forall\ b > 0$; $b \neq 1$

$$\boxed{\log_b 1 = 0}$$

2) $\forall\ b > 0$; $b \neq 1$

$$\boxed{\log_b b = 1}$$

PROPIEDADES OPERATIVAS

Considerando que $\log_b M$, $\log_b N$ existen:

1) $\boxed{\log_b M + \log_b N = \log_b (M \,.\, N)}$

2) $\boxed{\log_b M - \log_b N = \log_b \left(\dfrac{M}{N}\right)}$

ÁLGEBRA

3) $\boxed{\log_b M^n = n \cdot \log_b M}$

4) $\boxed{\log_b M = \log_{b^n} M^n}$

CASOS ESPECIALES:

1) $\boxed{\log_{(b^n)}(b^m) = \dfrac{m}{n}}$

2) $\boxed{\log_{(\sqrt[n]{b})}(\sqrt[m]{b}) = \dfrac{n}{m}}$

3) $\boxed{n = \log_b b^n}$

SISTEMA DE LOGARITMOS

SISTEMA DE LOGARITMOS NATURALES:

$$\boxed{\log_e N = \ln N \; ; \; N > 0}$$

SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES:

$$\boxed{\log_{10} N = \log N \; ; \; N > 0}$$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS

De logaritmo natural a decimal

$$\boxed{\log N = 0{,}4343 \cdot \ln N \; ; \; N > 0}$$

De logaritmo decimal a natural

$$\boxed{\ln N = 2{,}3026 \cdot \log N \; ; \; N > 0}$$

CAMBIO DE BASE

$$\boxed{\log_b N = \frac{\log_m N}{\log_m b}}$$

Donde: $N > 0 \wedge \{m, b\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$

CASO ESPECIAL: $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$$

REGLA DE LA CADENA:

$$\boxed{\log_b \cancel{a} \cdot \cancel{\log_a c} \cdot \cancel{\log_c d} \cdot \cancel{\log_d} e = \log_b e}$$

PROPIEDAD ADICIONAL:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ / b \neq 1$

$$\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$$

COLOGARITMO (colog)

$$\boxed{\operatorname{co}\log_b N = -\log_b N = \log_b\left(\frac{1}{N}\right)}$$

ANTILOGARITMO (antilog)

$$\boxed{\operatorname{anti}\log_b N = \exp_b N = b^N}$$

RELACIÓN ENTRE OPERADORES:

Teniendo en cuenta que $\{x; b\} \subset \mathbb{R}^+ / b \neq 1$:

1) $\operatorname{anti}\log_b(\log_b x) = x$

2) $\operatorname{anti}\log_b(\operatorname{co}\log_b x) = x^{-1}$

3) $\log_b(\operatorname{anti}\log_b x) = x$

4) $\operatorname{co}\log_b(\operatorname{anti}\log_b x) = -x$

ÁLGEBRA

LÍMITES

- Dada la función $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = F(x) \; ; x \in D_F$

$$\lim_{x \to a} F(x) = L$$

Considerando: ε = Epsilon y σ = Delta

$$\boxed{x \in \mathrm{Dom}(F) \wedge 0 < |x - a| < \sigma \to |F(x) - L| < \varepsilon}$$

LÍMITES LATERALES

1. LÍMITE LATERAL IZQUIERDO

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} F(x) = L_1}$$

Donde: $x \to a^- <> x < a$

2. LÍMITE LATERAL DERECHO

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} F(x) = L_2}$$

Donde: $x \to a^+ <> x > a$

TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE

El límite:

$$\lim_{x \to a} F(x) = L$$

existe si y sólo si:

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} = \lim_{x \to a^+} = L}$$

CÁLCULO DE LÍMITES

1) Si F está definido en "a" tenemos:

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$$

2) Si F no está definido en "a" tenemos:

$$\lim_{x \to a} F(x) \neq F(a)$$

TEOREMAS PARA CÁLCULO DE LÍMITES

1) Límite de la función constante:

$$\lim_{x \to a} k = k$$

2) Límite de la adición y/o sustracción:

$$\lim_{x \to a}[F(x) \pm G(x)] = \lim_{x \to a} F(x) \pm \lim_{x \to a} G(x)$$

3) Límite de la multiplicación:

$$\lim_{x \to a}[F(x) . G(x)] = \lim_{x \to a} F(x) . \lim_{x \to a} G(x)$$

4) Límite de la división:

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} F(x)}{\lim_{x \to a} G(x)} \; ; \; G(x) \neq 0$$

5) Límite de una potencia:

$$\lim_{x \to a}\left[F(x)^{G(x)}\right] = \left[\lim_{x \to a} F(x)\right]^{\lim_{x \to a} G(x)}$$

6) Límite de una radicación:

$$\lim_{x \to a}\left[\sqrt[G(x)]{F(x)}\right] = \sqrt[\lim_{x \to a} G(x)]{\lim_{x \to a} F(x)}$$

FORMAS DE LAS EXPRESIONES MATEMÁTICAS

1. FORMAS DEFINIDAS

A) $\dfrac{0}{N} = 0 \quad ; \quad \forall N \neq 0$

B) $\dfrac{N}{\infty} = 0 \quad ; \quad \forall N \in \mathbb{R}$

C) $N^{\infty} = 0 \quad ; \quad \forall N^2 < 1$

D) $N - N = 0 \quad ; \quad \forall N \in \mathbb{R}$

E) $0 . N = 0 \quad ; \quad \forall N \in \mathbb{R}$

ÁLGEBRA

2. FORMAS NO DEFINIDAS

A) $\frac{N}{0} = +\infty$; $N > 0$

B) $\frac{N}{0} = -\infty$; $N < 0$

C) $N^{\infty} = \infty$; $N^2 > 1$

3. FORMAS INDETERMINADAS

A) $\frac{0}{0}$ B) $\frac{\infty}{\infty}$ C) $\infty - \infty$

D) $0 \cdot \infty$ E) 1^{∞}

PROPIEDADES PARA LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\text{sen}(x)}{x}\right] = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\tan(x)}{x}\right] = 1$

3) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\text{arcsen}(x)}{x}\right] = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\arctan(x)}{x}\right] = 1$

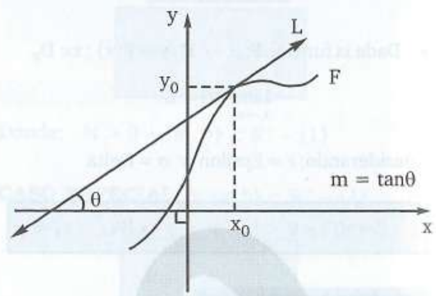
DERIVADAS

Dada la función continua F, F' indica la primera derivada de F y se define así:

$$\boxed{F'(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right]}$$

Donde: $\text{Dom}(F') \subset \text{Dom}(F)$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA



$$\boxed{L : y - F(x_0) = m(x - x_0)}$$

$$\boxed{m = F'(x_0) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}\right]}$$

REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) $F(x) = x^n \Rightarrow F(x) = n \cdot x^{n-1}; \ \forall\, n \in \mathbb{R}$

2) $F(x) = k \Rightarrow F'(x) = 0 ; \ \forall\, k \in \mathbb{R}$

3) $F(x) = G(x) + H(x) \Rightarrow F'(x) = G'(x) + H'(x)$

4) $F(x) = G(x) - H(x) \Rightarrow F'(x) = G'(x) - H'(x)$

5) $F(x) = G(x) \cdot H(x)$

$\Rightarrow F'(x) = G'(x) \cdot H(x) + G(x) \cdot H'(x)$

6) $F(x) = \frac{G(x)}{H(x)}$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{G'(x) \cdot H(x) - G(x) \cdot H'(x)}{[H(x)]^2}$

7) $F(x) = [G(x)]^n \Rightarrow F'(x) = n[G(x)]^{n-1}.G'(x)$

8) $[F \circ G](x) = F(G(x))$

$\Rightarrow [F \circ G]'(x) = F'(G(x))G'(x)$

REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) $y = \text{sen}[F(x)] \Rightarrow y' = \cos[F(x)] \cdot F'(x)$

2) $y = \cos[F(x)] \Rightarrow y' = -\text{sen}[F(x)] \cdot F'(x)$

3) $y = \tan[F(x)] \Rightarrow y' = \sec^2[F(x)] \cdot F'(x)$

4) $y = \cot[F(x)] \Rightarrow y' = -\csc^2[F(x)] \cdot F'(x)$

5) $y = \sec[F(x)] \Rightarrow y' = \sec[F(x)].\tan[F(x)].F'(x)$

6) $y = \csc[F(x)] \Rightarrow y' = -\csc[F(x)].\cot[F(x)].F'(x)$

REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1) $y = \text{Ln}[F(x)] \Rightarrow y' = \frac{1}{F(x)} \cdot F'(x)$

2) $y = \text{Log}_b F(x) \Rightarrow y' = \frac{\text{Log}_b e}{F(x)} \cdot F'(x)$

3) $y = k^{F(x)}; \ k = \text{cte} \Rightarrow y' = k^{F(x)} \cdot \text{Lnk} \cdot F'(x)$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

REGLA DE L'HOSPITAL – BERNOULLI

- Para levantar la indeterminación de la forma: $\frac{0}{0}$

$$\boxed{\lim_{x \to a}\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right] = \lim_{x \to a}\left[\frac{F'(x)}{G'(x)}\right]}$$

RAÍZ DE MULTIPLICIDAD

- Sea "a" raíz de multiplicidad "k" de la ecuación polinomial $P(x) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} P(a) = P'(a) = P''(a) = P'''(a) = \ldots \\ \ldots = P^{k-1}(a) \ \wedge \ P^k(a) \neq 0 \end{array}}$$

INTEGRALES

INTEGRAL INDEFINIDA

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

"Integral de f(x) diferencial de x es F(x) + c"

c = Constante de integración.

OBSERVACIÓN

Cualquier función cuya derivada es f(x) se llama una primitiva de f(x)

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \ n \neq -1$

3) $\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

4) $\int (U + V)dx = \int U dx + \int V dx$

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

6) $\int e^x dx = e^x + c$

7) $\int \text{sen}(x)dx = -\cos(x) + c$

8) $\int \cos(x)dx = \text{sen}(x) + c$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1) Integración por partes:

$$\int U\,dv = U.V - \int V\,du$$

2) Fracciones parciales:

* $\frac{Q(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

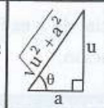
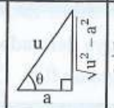
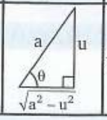
* $\frac{Q(x)}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2}$

* $\frac{Q(x)}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+c}{x^2+bx+c}$

ÁLGEBRA

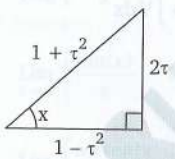
* $$\frac{Q(x)}{(x^2+bx+c)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(x^2+bx+c)^2}$$

3) Sustitución trigonométrica: siendo
   u = función y a = constante

BINOMIO	TRIÁNGULO	HACER	SUSTITUIR
u^2+a^2		$\frac{u}{a}=\tan(\theta)$	$u=a\tan(\theta)$ $du=a\sec^2(\theta)d\theta$
u^2-a^2		$\frac{u}{a}=\sec(\theta)$	$u=a\sec(\theta)$ $du=a\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$
a^2-u^2		$\frac{u}{a}=\text{sen}(\theta)$	$u=a\,\text{sen}(\theta)$ $du=a\cos(\theta)d\theta$

4) Funciones que contienen sen(x) y cos(x):

Utilizar $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\tau$ $\qquad dx=\frac{2d\tau}{1+\tau^2}$

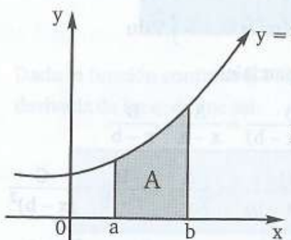


$$\text{sen}(x)=\frac{2\tau}{1+\tau^2}$$

$$\cos(x)=\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$$

INTEGRAL DEFINIDA

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$



$$A=\int_a^b f(x)dx$$

NOCIONES DE LÓGICA

CONCEPTO DE LÓGICA

Es la ciencia que expone las leyes, modos y formas del conocimiento científico.

DEFINICIONES BÁSICAS

1. **ENUNCIADO:**
   Es toda frase u oración en un lenguaje preciso.

   Algunos ejemplos son:
   a. Te estoy esperando.
   b. ¡Oh!
   c. Judith estudia.

2. **PROPOSICIÓN:**
   Es todo enunciado de tipo informativo, es decir puede ser calificado como verdadero o falso.

   Algunos ejemplos son:
   a. 7 es un número par.
   b. $\sqrt{100}+\sqrt[3]{8}=12$

CLASES DE PROPOSICIONES

1. **PROPOSICIÓN SIMPLE (P. S.):** Llamada también **proposición atómica**, es la proposición que contiene una sola afirmación, se representa por letras minúsculas. Algunos ejemplos son:
   p: Katy es una niña inquieta.
   q: Oscar es arquitecto.
   r: Marcelina es ama de casa.

2. **PROPOSICIÓN COMPUESTA (P. C.):** Llamada también **proposición molecular,** es aquella que está formada por dos o más proposiciones simples o la negación de una proposición simple.

CONECTIVO LÓGICO

Es una representación simbólica de alguna palabra que sirve para ligar dos proposiciones o negar una proposición

1. **NEGACIÓN (~):** Se utiliza para indicar el cambio de un contenido afirmativo a un contenido negativo o viceversa. Su tabla de verdad es la siguiente:

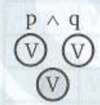
p	~p
V	F
F	V

Algunos ejemplos son:
p: Juan es profesor.
~p: Juan no es profesor.
q: Oscar es ingeniero.
~q: Oscar no es ingeniero.

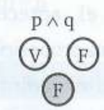
2. **CONJUNCIÓN (∧):** Sean p y q dos proposiciones; p ∧ q es la proposición compuesta llamada conjunción que se lee "p y q" y es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas, en cualquier otro caso es falso. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Algunos ejemplos son:
a. Gauss y Villarreal fueron matemáticos.
b. 15 es múltiplo de 5 y 2
   p: Gauss fue matemático ...... (V)
   p: 15 es multiplo de 5 ...(V)
   q: Villarreal fue matemático...... (V)
   q: 15 es multiplo de 2 ...(F)
   Luego por la tabla p ∧ q es verdadero:
   Luego por la tabla p ∧ q es falso



b. 15 es múltiplo de 5 y 2
   p: 15 es multiplo de 5 ...(V)
   q: 15 es multiplo de 2 ...(F)
   Luego por la tabla p ∧ q es falso



3. **DISYUNCIÓN INCLUSIVA O DÉBIL (∨):** Sean p y q dos proposiciones , p ∨ q es la proposición compuesta llamada disyunción inclusiva que se lee "p o q" y es falsa si ambas proposiciones son falsas , en cualquier otro caso es verdadera. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. **DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE (Δ):** Sean las proposiciones p y q; $p \Delta q$ es la proposición compuesta amada disyunción exclusiva y se le reconoce por que el término sugiere que la verdad o falsedad de una proposición es incompatible con la verdad o falsedad de otro. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5. **CONDICIONAL ($\rightarrow$):** Sean las proposiciones p y q; $p \rightarrow q$ es la proposición compuesta llamada condicional que se lee " si p entonces q" donde p es el antecedente y q el consecuente. Una proposición condicional es falsa sólo si el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Su tabla verdadera e s la siguiente.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

6. **BICONDICIONAL ($\leftrightarrow$):** Sean las proposiciones p y q; $p \leftrightarrow q$ es la proposición compuesta llamada bicondicional. Una bicondicional es verdadera sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TAUTOLOGÍAS, CONTRADICCIONES Y CONTINGENCIAS

1. **TAUTOLOGÍA:** Consideremos la siguiente proposición compuesta
cuya tabla de verdad es: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

p q	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
V V	V V V V V
V F	F F V V F
F V	V F F V V
F F	V F F V F

Observa que la proposición compuesta resulta siempre verdadera, independiente del valor de las componentes, luego decimos que se tiene una tautología o ley lógica.

2. **CONTRADICCIÓN:** Consideremos la siguiente proposición compuesta.
cuya tabla de verdad es: $\sim[(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)]$

p q	$\sim[(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)]$
V V	F V V V
V F	F V V V
F V	F V V V
F F	F F V F

Observa que la proposición compuesta resuelta siempre falsa, luego decimos que la proposición expresa una contradicción .

3. **CONTINGENCIA :** Consideremos la siguiente proposición compuesta $p \vee \sim q$
cuya tabla de verdad es:

p q	$p \vee \sim q$
V V	V
V F	V
F V	F
F F	F

Observa que la proposición compuesta contiene indistintamente valores verdaderos y falsos, luego decimos que la proposición es una CONTINGENCIA.

LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Siendo p, q y r proposiciones, tenemos:

1) **IDEMPOTENCIA**
1A. $p \vee p \equiv p$
1B. $p \wedge p \equiv p$

2) **ASOCIATIVA**
2A. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
2B. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge$

3) **CONMUTATIVA**
3A. $p \vee q \equiv q \vee p$
3B. $p \wedge q \equiv q \wedge q$

4) **DISTRIBUTIVA**
4A. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4B. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5) **DE IDENTIDAD**
5A. $p \vee F \equiv p$
5B. $p \vee V \equiv v$
5C. $p \wedge V \equiv p$
5D. $p \wedge F \equiv F$

6) **DE COMPLEMENTO:**
6A. $p \vee \sim p \equiv V$
6B. $\sim\sim p \equiv p$
6C. $p \wedge \sim p \equiv F$
6D. $\sim V \equiv F ; \sim F \equiv V$

7) **DE MORGAN:**
7A. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
7B. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

8) **DE ABSORCIÓN:**
8A. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
8B. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

FUNCIÓN PROPOSICIONAL

Todo proposición simple asigna a un sujeto particular una determinada propiedad.

Si "p" es la propiedad denotamos con P(x) al conjunto de todas las proposiciones que se obtienen al sustituir el sujeto variable (x) por un individuo; quedando definida una función proposicional con una variable. P(x) es una función proposicional, carece de sentido decir que es verdadera o falsa; pero cada (x) particular se convierte en proposición.

PROPIEDAD:
Dado un conjunto A y sobre el una función proposicional P(x), P(a) tiene la propiedad de ser verdadero o falso para todo $a \in A$.

OBSERVACIÓN

A partir de funciones proposicionales se pueden obtener proposiciones generales mediante el proceso lógico denominado CUANTIFICACIÓN.

CUANTIFICADORES

Son expresiones que denotan cantidad y que al ligarse con funciones proposicionales forman una proposición.

1. **CUANTIFICADOR UNIVERSAL ($\forall$):** Se utiliza para indicar que la variable de la función proposicional puede asumir todos los valores del conjunto dado. El cuantificador universal se simboliza con $\forall$ y se lee así: "Para todo"

2. **CUANTIFICADOR EXISTENCIAL ($\exists$):** Se utiliza para indicar que la variable de la función proposicional puede asumir al menos uno de los valores de un conjunto dado. El cuantificador existencial se simboliza con $\exists$ y se lee así: " existe al menos un"

OBSERVACIÓN

A) Para el cuantificar universal $\forall$, la proposición será verdadera si la función proposicional es verdadera para todos los elementos del conjunto de referencia.

B) Para el cuantificador existencial $\exists$, la proposición será verdadera si se encuentra por lo menos un elemento del conjunto de referencia que hace verdadera la función proposicional.

NEGACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES

1. A) $\sim(\forall x : p(x)) \equiv (\exists x : \sim p(x))$

2. B) $\sim(\exists x : p(x)) \equiv (\forall x : \sim p(x))$

Ejemplo:

a) "Todos los hombres son mortales".

Simbolizando: $\forall x: P(x)$

Negando: $\sim(\forall x: P(x))$

"Algún hombre no es mortal".

Simbolizando: $\exists x: \sim P(x)$

PROPOSICIONES EQUIVALENTES

A. DEFINICIÓN:

Dos proposiciones se dice que son lógicamente equivalentes si los resultados de su tabla de verdad son idénticos. Si p y q son proposiciones equivalentes, se denota: $p \equiv q$.

Ejemplo:

Veamos la tabla de verdad de: $p \to q$.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

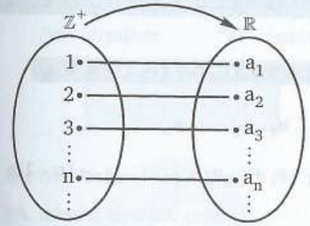
Ahora veamos la tabla de verdad de: $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

$\therefore p \to q \equiv \sim p \vee q$

SUCESIONES

- Son aplicaciones de la forma $a_n : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$



a_1 = Primer elemento (o término) de la sucesión

a_n = Término n–ésimo de la sucesión

NOTA

1) Si la sucesión tiene "n" términos:

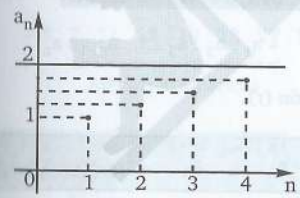
$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

2) Si la sucesión consta de infinitos términos:

$\{a_n\}_{n\geq 1} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

$$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n\geq 1} : 1;\ \frac{4}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{8}{5};\ \frac{5}{3};\ \ldots$$



LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = L \iff \lim_{n\to\infty} (a_n) = L$$

SUCESIONES MONÓTONAS

1. SUCESIÓN CRECIENTE

$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k < a_{k+1} < \ldots ; k \in \mathbb{Z}^+$

2. SUCESIÓN DECRECIENTE

$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_k > a_{k+1} > \ldots ; k \in \mathbb{Z}^+$

3. SUCESIÓN NO DECRECIENTE

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \ldots ; k \in \mathbb{Z}^+$

4. SUCESIÓN NO CRECIENTE

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \ldots ; k \in \mathbb{Z}^+$

SUCESIONES ACOTADAS

$\{a_n\}$ = Sucesión; $M \wedge N \in \mathbb{R}$

$$M \leq a_n \leq N \ ; \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

PRUEBA DE LA RAZÓN PARA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \ ; \ L \in \mathbb{R}$$

Si: $L < 1$, a_n es convergente y converge a cero.

Teorema del Encaje:

Sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$; $n \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} (c_n) = L \ ; \ L \in \mathbb{R}$$

Entonces: $\lim_{n\to\infty} (b_n) = L$

Teoremas Adicionales:

De la media aritmética:

Siendo: $\lim_{n\to\infty} (a_n) = a$

Entonces: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}\right) = a$

De la media geométrica:

Siendo: $\lim_{n\to\infty} (a_n) = a$

Entonces: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}\right) = a$

SERIES INFINITAS DE NÚMEROS REALES

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

SERIES CONVERGENTES Y DIVERGENTES

Teorema:

Dadas las series convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con sumas a y b respectivamente

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot a \; ; \; \forall \; k \in \mathbb{R}^* - \{0\}$

Propiedad:

Si: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a \dots + a_n + \dots$

es convergente, entonces $\lim_{n \to \infty} (a_n) = 0$

SERIES NOTABLES

SERIE ARMÓNICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

es divergente.

SERIE GEOMÉTRICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} (aq^{n-1}) = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

Si: $|q| < 1$ es convergente
Si: $|q| \geq 1$ es divergente

SERIE TELESCÓPICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots$$

La serie converge si y sólo si b_{n+1} tiende a un número finito cuando $n \to \infty$, siendo su suma:

$$S = b_1 - \lim_{n \to \infty} (b_{n+1})$$

PROGRESIONES

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

REPRESENTACIÓN DE UNA P.A.

$$\div\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, \dots \,.\, a_n$$

$$\div\, a_1 \,.\, a_1 + r \,.\, a_1 + 2r \,.\, \dots \,.\, a_1 + (n-1)r$$

Donde:
- $\div$ = inicio de la P.A.
- $.$ = separación de términos
- a_1 = primer término
- a_n = término n-ésimo
- n = número de términos
- r = razón de la P.A.

CLASES DE P.A.

1) Si: $r > 0$, la P.A. es creciente

2) Si: $r < 0$, la P.A. es decreciente

PROPIEDADES DE UNA P.A.

$$\div\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, \dots \,.\, a_{n-1} \,.\, a_n$$

1) Razón (r)

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

2) Término n-ésimo (a_n)

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

3) Número de términos (n)

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

4) Términos equidistantes de los extremos (a_y y a_x)

$$\div\, a_1 \,.\, \dots \,.\, a_x \,.\, \dots \,.\, a_y \,.\, \dots \,.\, a_n$$

"m" términos   "m" términos

$$a_x + a_y = a_1 + a_n$$

5) Término central (a_c): Siendo "n" impar la P.A. admite término central.

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

6) Suma de los "n" primeros términos de una P.A. (S^n)

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) . n$$

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] . n$$

MEDIOS ARITMÉTICOS

$$\div\, 3 \,.\, \underbrace{7 \,.\, 11 \,.\, 15 \,.\, 19 \,.\, 23 \,.\, 27}_{\text{Medios aritméticos}} \,.\, 31$$

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS

$$\div\, a \,.\, \underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots}_{\text{"m" Medios aritméticos}} \,.\, b$$

Por fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)r$

donde N° términos $n = m + 2$

Reemplazando: $b = a + (m+1)r$

$$r = \frac{b - a}{m + 1}$$

PROGRESIÓN ARMÓNICA (P.H)

Los elementos $a_1; a_2; a_3; \dots$ y a_n forman una P.H. si sus recíprocos forman una P.A., es decir:

$$\div\, \frac{1}{a_1} \,.\, \frac{1}{a_2} \,.\, \frac{1}{a_3} \,.\, \dots \,.\, \frac{1}{a_n}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

REPRESENTACIÓN DE UNA P.G.

$$\div\div\, t_1 : t_2 : t_3 : \dots : t_n$$

$$\div\div\, t_1 : t_1q : t_2q^2 : \dots : t_1q^{n-1}$$

Donde:
- $\div\div$ = inicio de la progresión
- $:$ = separación de términos
- t_1 = primer término
- t_n = término n-ésimo
- n = número de término
- q = razón de la P.G.

CLASES DE P.G.

1) Si: $q > 1$, la P.G. es creciente

2) Si: $0 < q < 1$, la P.G. es decreciente

3) Si: $q < 0$, la P.G. es oscilante

PROPIEDADES DE UNA P.G.

$$\div\div\, t_1 : t_2 : t_3 : \dots : t_{n-1} : t_n$$

1) Razón (q)

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

2) Término n-ésimo (t_n)

$$\boxed{t_n = t_1 \cdot q^{n-1}}$$

3) Número de términos (n): Teniendo en cuenta que t_n, t_1 y q son positivos.

$$\boxed{n = \frac{\log(t_n) - \log(t_1)}{\log(q)} + 1}$$

4) Términos equidistantes de los extremos $(t_x \text{ y } t_y)$

$$\div\div\ t_1 : \ldots : t_x : \ldots : t_y : \ldots : t_n$$

"m" términos "m" términos

$$\boxed{t_x \cdot t_y = t_1 \cdot t_n}$$

5) Término central (t_c) : Siendo "n" impar, la P.G. admite término central.

$$\boxed{t_c = \sqrt{t_1 \cdot t_n}}$$

6) Suma de los "n" primeros términos de una P.G. (S_n)

$$\boxed{S_n = t_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)} \quad ; q \neq 1$$

7) Suma límite $(S_{\lim})$: Para P.G. de infinitos términos, es decir en caso de que $n \to \infty$

$$\boxed{S_{\lim} = \frac{t_1}{1 - q}} \quad ; -1 < q < 1$$

8) Producto de los "n" primeros términos de una P.G. (P_n)

$$\boxed{P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}}$$

MEDIOS GEOMÉTRICOS

$$\div\div\ 1 : \underbrace{2 : 4 : 8 : 16 : 32}_{\text{Medios geométricos}} : 64$$

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

$$\div\div\ a : \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"m" Medios geométricos}} : b$$

Por fórmula: $t_n = t_1 q^{n-1}$

Reemplazando: $b = a \cdot q^{m+1}$

$$\boxed{q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}}$$